Korešpondenčný seminár UFO
X. ročník, 2016/2017
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

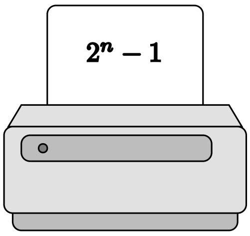
Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Prvočíslo

Vy, naivní riešitelia, si myslíte, že zvodnému a dokonalému čaru prokrastinácie podliehate len vy. Že len vy ste tlačení termínmi. No nie je to tak. Aj my, vedúci, máme vždy kopec inej práce a vždy sa nájde niečo, čo nám umožní v správnej chvíli pozrieť na hodiny alebo do kalendára, a dostať menšiu srdcovú príhodu. (Len do zajtra?!)

„Keď prokrastinácia, tak na úrovni," povedal si Maťo, a prokrastinuje štúdiom matiky. A poriadnej. Ale princíp prokrastinácie ešte stále nepochopil, lebo to robí až vtedy, keď je všetko hotové.

Nedávno sa dopočul, že bolo objavené nové Mersennovo prvočíslo[1]*. Má niečo cez 22 miliónov cifier. Maťo si najskôr zaumienil, že sa ho naučí naspamäť. No našťastie si včas uvedomil, že to by bolo na neho priveľa. Tak že si ho aspoň napíše. Skúste odhadnúť, koľko miesta na papieri (strán) by zabralo, ak by sme ho chceli na papier vytlačiť alebo napísať.*



Možností, ako si vie Maťo zapísať dané prvočíslo, je neskutočne veľa. Môže si ho zapísať na počítači, kde si môže vybrať veľkosť fontu, riadkovanie, či typ písma alebo si ho môže spísať ručne na papier, kde vyskakujú možnosti ako riadkovaný či štvorčekový zošit, kancelársky papier a jednotlivé spôsoby vie dokonca aj kombinovať. Táto skutočnosť teda jasne naznačuje, že každý by mal prísť k inému výsledku. Čo by však malo byť spoločné, je spôsob, akým ste sa k výsledku dopracovali. Ďalej by bolo vhodné spomenúť, že v linku, ktorý zadanie poskytuje, je uvedené, že Mersennovo prvočíslo má niečo cez 22 miliónov cifier. To nie je veľmi presný údaj. Nech sa teda snažíme akokoľvek, o počte strán, ktorý vypočítame, nemôžeme tvrdiť, že je to presný údaj. Vie to však dať dobrý odhad, čo je niekedy práve to, čo potrebujeme.

Poďme sa na daný problém pozrieť spolu. Pre jednoduchosť predpokladajme, že použil iba jeden spôsob. Povedzme, že si vybral riadkované zošity. Ako však prísť na to, koľko strán zapísal, bez toho, aby sme túto šialenú praktiku museli vykonávať aj my? Jednoducho. Stačí si uvedomiť, že každá strana má rovnaký počet riadkov a že všetky riadky ponúkajú rovnako veľa priestoru. Zistíme teda, koľko cifier napíšeme do jedného riadku. Toto číslo nebude veľmi presné, ak sa nesnažíme písať monospace-om[2], o čom pochybujem. Ak by ste chceli byť teda presní a nechce sa vám písať monospace-om, môžete zapísať viacero riadkov a z daných hodnôt spraviť aritmetický priemer. Čím viac riadkov, tým presnejší údaj. Je to však zbytočná presnosť, nakoľko nevieme ani to, koľko to Mersennovo prvočíslo vlastne tých cifier má. Vieme, že niečo nad 22 miliónov, čo rozhodne nie je presný údaj. Snažiť sa o presnosť v počte znakov na riadok takým spôsobom je teda zbytočné.

Povedzme, že do jedného riadku napíšeme priemerne 65 cifier a riadkované zošity, ktoré si Maťo vybral, majú 33 riadkov. Teraz už nie je problém zistiť, koľko cifier bude na jednej strane:

$$\text{počet čísel v riadku} \cdot \text{počet riadkov} = \text{počet čísel na jednej strane.}$$

[1] O Mersennových prvočíslach sa môžete dočítať napríklad na https://sk.wikipedia.org/wiki/Mersennovo_prvo%C4%8D%C3%ADslo

[2] Na každý znak pripadá presne definovaný priestor, ktorý je pre každý znak rovnaký.

A k odpovedi na otázku – na koľko strán zapíšeme 22 000 000-ciferné číslo – sa už dostaneme jednoducho podielom:

$$\frac{\text{počet cifier čísla}}{\text{počet cifier na jednej strane}} = \text{počet strán, ktoré Maťo touto prokrastináciou zapísal.}$$

Takže máme výsledok:

$$\frac{22\ 000\ 000}{65 \cdot 33} = 10\ 256{,}41 \text{ strán,}$$

čo je výsledok až príliš presný na to, s akou (ne)presnosťou sme odhadovali počet cifier pripadajúcich na riadok. Čiže keby sme si to skúsili naozaj, zapísali by sme tisíce až desaťtisíce strán.

S daným údajom vieme pokračovať ďalej. Mohli by sme spočítať, koľko si má na to kúpiť zošitov, ako veľmi je to neekologické (koľko stromov kvôli tomu neprežilo), koľko času mu to zabralo… Ja by som to však ukončila myšlienkou, že dosť na to, aby sme si uvedomili, že prokrastinácia je vec, s ktorou by sme všetci mali bojovať.

1.2 Smoothie à la NesKvík

NesKvík pije smoothies. Vie, že od čaju by mal žlté zuby, a čo by na to povedala Plyš? Preto vždy zoberie všetko ovocie, čo vidí a nahádže ho do odšťavovača. Teda, len vtedy, keď sa zmestí, lebo krájanie by mu dalo príliš veľa roboty.

Kvík má odšťavovač s kruhovým otvorom s priemerom 9 cm*. Má guľaté jablko s hustotou* 720 kg/m^3 *a hmotnosťou* 320 g*, rovnako guľatý pomaranč s hustotou* 1 kg/dm^3 *a hmotnosťou* 320 g*, valcovitý kúsok ananásu s hustotou* 0,95 g/cm^3*, hmotnosťou* 0,5 kg *a výškou* 99,8 mm *a hrušku (tvaru približne dvoch gúľ položených na seba, jedna s dvakrát menším polomerom ako druhá) s hustotou* 1100 g/dm^3 *a hmotnosťou* 440 g*. Z ktorého ovocia si vie urobiť vo svojom odšťavovači smoothie?*

Každé ovocie má svoje rozmery a my potrebujeme toto ovocie dostať cez dieru s priemerom 9 cm, pričom pri každom ovocí hľadáme najširšie miesto.

Najprv zistíme objemy jednotlivých telies. Použijeme známy vzorec: $V = m/\rho$. Najprv sa však musíme uistiť, čo do toho vzorca dosadíme, s hustotou 720 kg/m^3 a hmotnosťou 320 g to asi nebude najlepšie, preto najprv prevedieme všetky hustoty na kg/m^3 a hmotnosti na kilogramy.

Dostaneme:

- jablko s hustotou 720 kg/m^3 a hmotnosťou 0,320 kg. Teda objem $4{,}444 \cdot 10^{-4}$ m^3
- pomaranč s hustotou 1000 kg/m^3 a hmotnosťou 0,320 kg. Teda objem $3{,}2 \cdot 10^{-4}$ m^3
- ananás s hustotou 950 kg/m^3 a hmotnosťou 0,500 kg. Teda objem $5{,}263 \cdot 10^{-4}$ m^3
- hrušku s hustotou 1100 kg/m^3 a hmotnosťou 0,440 kg. Teda objem $4 \cdot 10^{-4}$ m^3

Pre jablko a pomaranč (neskôr aj pre hrušku) použijeme známy vzorec na výpočet $V = \frac{4\pi}{3}r^3$. Pre polomer teda bude platiť $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Dosadíme a vyjde nám polomer jablka približne 0,0473 m a pomaranča 0,0423 m.

Z týchto údajov vieme rovno usúdiť, jablko sa o Kvíkovho odšťavovača nezmestí, ale pomaranč áno. Polomer Kvíkovho otvoru je polovica priemeru, teda 0,045 m a nám stačí porovnať, či majú väčší alebo menší polomer. Teraz na ananás. Je to valec, takže sa pohráme s iným vzorcom.

Objem valca sa dá vyjadriť ako podstava krát výška. Objem a podstavu poznáme, takže nám ostáva už len podstava, kde jediná premenná je zase len polomer. Platí $S = V/h$ a $S = \pi r^2$, z čoho dostaneme $r = \sqrt{\frac{V}{h\pi}}$. Samozrejme nezabudneme premeniť výšku na metre, čo je 0,0998 m. Dostaneme polomer 0,409 m, čo sa pohodlne zmestí do odšťavovača.

A nakoniec hruška. Máme dve gule, jednu s polovičným polomerom oproti druhej. Menšia nás nebude zaujímať, keďže cez otvor potrebujeme dostať hlavne tú väčšiu. Keď si polomer väčšej gule označíme r, potom objem celej hrušky vypočítame ako $V = \frac{4\pi}{3}\left(r^3 + (r/2)^3\right)$. Vnútro zátvorky je vlastne $9/8r^3$, takže výraz ešte upravíme na $V = \frac{3\pi}{2}r^3$, a odtiaľ vyjadríme $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{3\pi}}$. Teraz už len dosadíme objem a máme polomer 0,0439 m, čo sa taktiež zmestí do odšťavovača.

Takže do odšťavovača sa zmestí ananás, pomaranč a hruška; jablko sa nezmestí.

1.3 Rýchlovarná kanvica

Boli by sme naivní, keby sme si mysleli, že jeden čajík zmierni Katkin smútok za domovom. Na to treba aspoň dva čajíky. Lenže na ten druhý treba naozaj dlho čakať. Prečo sa vôbec tá kanvica volá rýchlovarná?

Nájdite si doma alebo vo svojom okolí rýchlovarnú kanvicu a pokúste sa čo najpresnejšie experimentálne zistiť jej výkon a účinnosť. Vami získané údaje porovnajte s údajmi od výrobcu.

Pri robení experimentov si dajte pozor, aby ste sa neobarili alebo nedošlo k zraneniu elektrickým prúdom!

Rýchlovarná kanvica slúži na zohrievanie vody. Pod pojmom výkon budeme teda rozumieť, aké teplo vie kanvica vode dodať za nejaký čas. Lenže merať teplo samotné nie je vôbec jednoduché! Veličinou, ktorá s dodávaním tepla priamo súvisí a vieme ju merať, je zmena teploty vody. Hneď na úvod si teda ukážme, ako vieme zo zmeranej zmeny teploty vody určiť výkon kanvice.

Za čas τ dodá kanvica s výkonom P (to je veličina, ktorú chceme zistiť) teplo $Q = P\tau$. Toto teplo sa odovzdá vode s teplotou t_0, čím sa jej teplota zmení na t_1.

Z kalorimetrickej rovnice pre rozdiel teplôt $t_1 - t_0$ a teplo Q platí $Q = mc(t_1 - t_0)$, kde m je hmotnosť vody v kanvici (vieme jednoducho zmerať) a c je merná tepelná kapacita vody (z tabuliek $c = 4180\,\mathrm{J\,K/kg}$). Ak do tejto rovnice dosadíme za Q z výrazu pre výkon a čas a vyjadríme si výkon P, dostaneme

$$P = \frac{mc(t_1 - t_0)}{\tau}.$$

Vyjadrili sme si teda hľadaný výkon kanvice pomocou veličín, ktoré poznáme, alebo ich vieme zmerať!

Kanvica je však elektrický spotrebič, ktorý na teplo premieňa elektrickú energiu, ktorú nazývame príkon (značíme P'). Nie všetok príkon sa však odovzdá v podobe tepla priamo zohrievanej vode. Nejaká časť z neho sa stratí na ohrev kanvice alebo v prívodných vodičoch a podobne. Práve pomer medzi výkonom a príkonom nazývame účinnosť, ktorú značíme gréckym písmenom eta: $\eta = P/P'$.

Priamo merať príkon kanvice väčšinou nie je potrebné, pretože výrobca tento údaj uvádza priamo na spotrebiči. Naša kanvica mala napríklad príkon 2400 W.

Výkon kanvice sme merali pri zohrievaní rôzneho (ale vopred odváženého) množstva vody z počiatočnej teploty približne 22 °C (viď tabuľku). Vodu sme zohrievali po dobu 70 s a zmerali sme konečnú teplotu vody, ktorá bola najviac 72 °C. Výhoda tohto postupu spočíva v tom, že nemusíme merať príliš vysokú teplotu vody (ktorá je často mimo rozsahu bežných teplomerov) a nemusíme sa báť, že voda v kanvici nám začala vrieť (pri vrení vody sa síce teplo spotrebúva na skupenskú premenu, no teplota sa ďalej nemení).

Z nameraných veličín sme s pomocou horeuvedených vzťahov vypočítali výkon, a následne aj účinnosť kanvice pre jednotlivé hmotnosti (viď tabuľku). Je zjavné, že účinnosť kanvice sa s hmotnosťou výrazne nemení (tzn. účinnosť kanvice nezávisí na hmotnosti vody) a jej priemerná hodnota je po zaokrúhlení 75%.

Uvádzať výsledok na viac desatinných miest nemá zmysel, pretože naše meranie bolo určite zaťažené chybami. Konkrétne, odhadujeme nepresnosť merania teploty na 1 °C a nepresnosť merania času na 0,5 s.

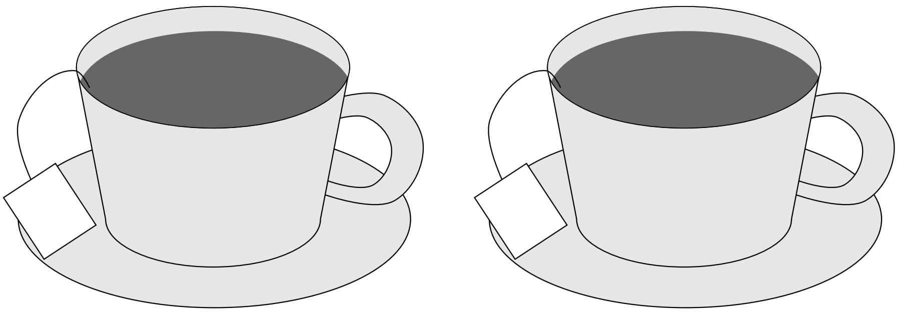
m/kg	t_0/°C	t_1/°C	P/W	η/%
0.6	22.6	72.0	1780	74
0.7	22.4	64.0	1740	72
0.8	22.5	60.9	1840	76
0.9	22.6	56.0	1800	75
1.0	22.2	52.8	1820	76
1.1	22.4	50.4	1840	77
1.2	22.7	48.1	1820	76
1.3	22.6	46.1	1820	76

Tabuľka 1: Namerané hodnoty výkonu a účinnosti 2400 W rýchlovarnej kanvice pre rôzne hmotnosti zohrievanej vody.

1.4 Dušanov čaj

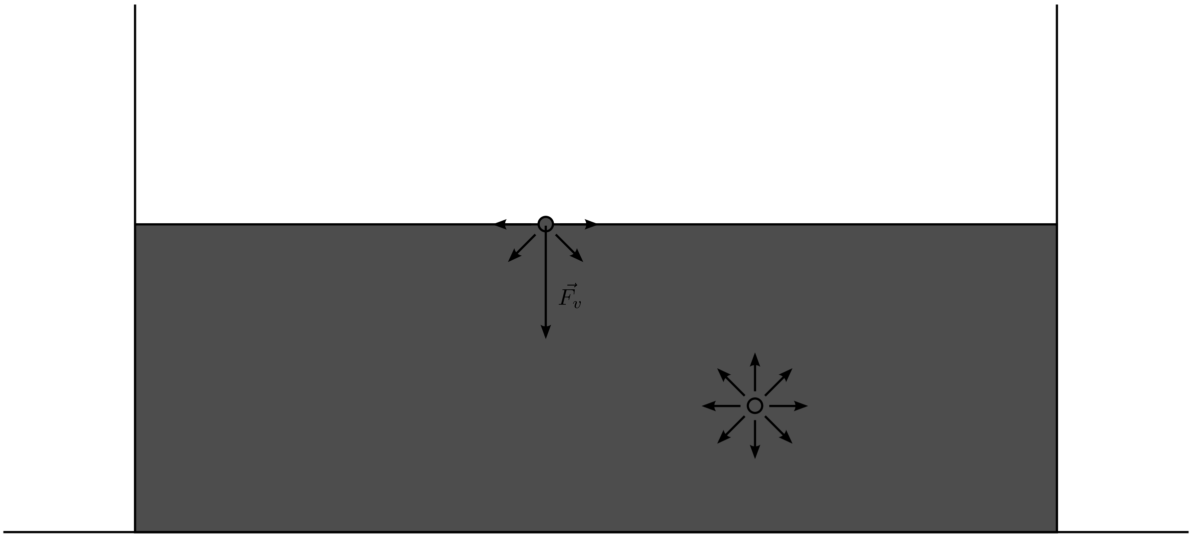
Duško neprokrastinuje. Teda len trošku. Ale ak už sa dá k nejakej práci, vždy mu pri tom dobre vysmädne. A čo iné by Duško pri tej ťažkej práci pil, ako čaj?

Urobil si teda anglický čaj o piatej. K tomu samozrejme papal digestive biscuits. Všimol si, že keď ponára keksík do čaju, tak najprv musí silnejšie zatlačiť, aby sa ponoril, no potom to už ide ľahšie. Po chvíli, keď ho vyťahoval, to už zas išlo ťažšie. Vysvetlite Duškovi, čo sa presne stalo počas toho, ako si máčal svoj obľúbený keksík, a prečo mu občas išiel vytiahnuť/ponoriť ťažšie ako inokedy.



Celá mágia tejto úlohy spočíva v dvoch veciach, vztlakovej sile a povrchovom napätí. S povrchovým napätím ste sa možno nestretli, preto si ho najprv priblížime kúsok viac.

Molekuly každej kvapaliny na seba navzájom pôsobia medzimolekulovými silami. Keď sa pozrieme na molekulu vnútri kvapaliny, vidíme, že na ňu pôsobia ostatné molekuly zo všetkých strán, preto môžeme povedať, že vzájomné silové účinky sa kompenzujú a výslednica pôsobiaca na molekulu je nulová. Pre molekuly na povrchu kvapaliny to ale neplatí, pretože sú obklopené kvapalinou iba zospodu. Výslednica medzimolekulových síl na molekuly na povrchu kvapaliny teda nebude nulová.



Obrázok 1: *medzimolekulové pôsobenie vnútri a na povrchu kvapaliny*

Z existencie tejto sily, ktorú nazývame povrchová sila alebo sila povrchového napätia, vyplýva fakt, že na prenesenie molekuly z vnútra kvapaliny na povrch musíme vykonať prácu. Hladina má teda o čosi väčšiu potenciálnu energiu. Kvapalina, snažiac sa zaujať stav s najnižšou energiou, preto súčasne s minimalizovaním potenciálnej energie minimalizuje aj svoj povrch (preto majú kvapky približne guľový tvar).

Späť k našej úlohe. Na to, aby sme keksík ponorili do čaju, musíme najprv prekonať povrchové napätie na hladine čaju. Ak si predstavíme povrch kvapaliny ako pružnú blanu, tak ju keksíkom najprv naťahujeme (zväčšujeme povrch kvapaliny, teda konáme prácu proti povrchovej sile a cítime odpor), kým ju neprerazíme. Potom by to malo už ísť ľahšie, no netreba zabúdať na to, že keksík je plný vzduchu a celkovo má menšiu hustotu ako čaj(voda). To znamená, že pri ponáraní bude pôsobiť vztlaková sila proti smeru potápania.

Teraz chvíľu necháme keksík namočený v čaji. Čo sa stane? Do pórovitého materiálu, ktorým keksík je, sa nasaje čaj, a vztlaková sila nám už nebude brániť v ponáraní.

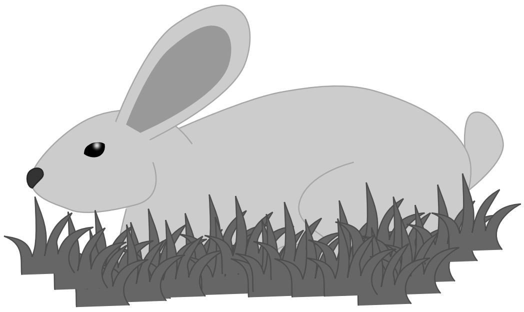
Naopak, keď chceme keksík vytiahnuť, pôjde to ťažšie ako pred tým, než sme ho ponárali, lebo budeme okrem samotného keksíka vyťahovať aj nasatý čaj. Okrem toho nám tu opäť bude pôsobiť aj povrchové napätie. Pri vyťahovaní prakticky vytrhávame nejaký kus z celého objemu čaju, čiže zväčšujeme jeho voľný povrch, a teda naň pôsobí sila povrchového napätia, ktorá sa ho snaží vtiahnuť späť. Teda až kým nevytiahneme keksík úplne.

Keby sme si jednotlivé sily vyčíslili, videli by sme, že vztaková sila hrá vo všeobecnosti väčšiu úlohu. No musíme konštatovať, že ak narúšame voľný povrch čajíka a snažíme sa zväčšovať jeho voľný povrch, musíme vykonať nejakú prácu navyše.

1.5 Zajace a diera v stene

Niektorí z nás majú na prokrastináciu aj rozumnú výhovorku. Napríklad práca v domácnosti. Ale aj tá sa dá obísť a taká Enka je toho príkladom.

Enka chová doma zajace. Naposledy však poškodili klietku a Enke nezostalo nič iné ako nahradiť poškodenú časť plechom. Enkin plech však obsahoval kruhovú dieru. Enka preto okraje diery poctivo opracovala, aby sa zajačikom nič nestalo. Zajačiky sa cez dieru nedostanú, lebo je pre ne primalá, Enka sa však bojí o to, čo sa bude diať s dierou v lete, keď sa plech na slnku rozhorúči a začne sa teplotne rozťahovať. Zväčší sa, či zmenší sa kruhová diera v plechu? Svoju odpoveď zdôvodnite.



Povedzme si otvorene, toto nebola vôbec ľahká úloha. Bolo potrebné sa zamyslieť, čo sa deje s plechom, keď sa zohreje. V prvom rade som veľmi rád, že mnohí z vás to úspešne zvládli, no pustime sa teraz do samotného riešenia úlohy.

Kov, ako aj iné tuhé látky, si môžeme pokojne predstaviť ako atómy (prípadne molekuly) pospájané pevnými tyčkami, ktoré predstavujú väzby. Hoci je takáto predstava väzieb triviálna a vzdialená od reality, v prvom priblížení pomerne dobre popisuje vlastnosti týchto látok, v našom prípade tepelnú rozťažnosť. V školách sa zvyknete učiť, že tepelnú rozťažnosť materiálu definuje koeficient tepelnej rozťažnosti α, ktorý hovorí, že ak materiál zahrejete o ΔT, pôvodná dĺžka l narastie o $\alpha \Delta T l$. Ako iste viete, tyčky alebo kovy sa zvyknú so zvyšujúcou teplotou rozťahovať, takže α majú kladné. To však nebudeme úplne potrebovať, na to aby sme zistili odpoveď na Enkinu otázku, no je dobré, aby ste to vedeli ;)

Predstavme si teraz nasledovný experiment. Zahrejeme Enkin plech tak, aby každá tyčka (väzba) zväčšila svoju dĺžku k-krát. To znamená, že aj vzdialenosť medzi dvoma bodmi sa zväčší k-krát, a mimochodom aj to, že obsah plechu sa zväčšil k^2-krát a objem k^3-krát. Mohli by ste sa teraz spýtať, medzi ktorými dvoma bodmi sa zväčšila vzdialenosť. Samozrejme, že medzi susednými. No z toho by malo byť každému jasné, že aj medzi ľubovoľnými dvoma bodmi sa musela vzdialenosť zväčšiť práve k-krát. Ak sa teraz zamyslíme, že aj dva proti sebe ležiace body na okraji kruhovej diery sú tie ľubovoľné, tak odpoveď je jasná. Diera v plechu sa tiež zväčší, jej obsah dokonca k^2-krát, a Enke zajačiky s najväčšou pravdepodobnosťou utečú.