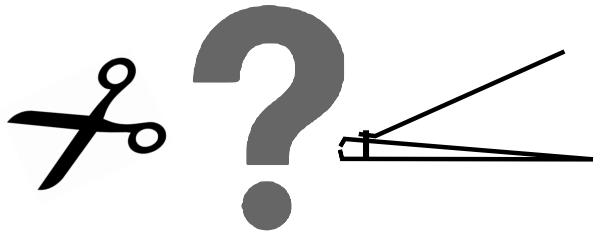
Riešenia 1. série letnej časti

1.1 Klieštiky vs. nožničky

vzorák **Dušan**, opravoval **Dušan**

Prečo si vie Samo ostrihať nechty nožničkami s použitím oveľa menšej sily ako s klieštikmi?



Ako správni fyzici, by ste si mali najprv overiť, či zadanie neklame. A naozaj, keď si striháte nechty nožničkami, potrebujete na to vynaložiť menej sily, ako keď používate klieštiky.

Prečo? Pokúsime sa to teoreticky zdôvodniť. Sú za tým dva výrazné efekty, no ktorý z nich je dôležitejší nevieme povedať bez toho, že by sme problém dôkladnejšie experimentálne preskúmali. Preto stačilo, ak ste v riešení uviedli aspoň jeden z nich a poriadne ho vysvetlili.

Najprv sa zameriame na to, ako dobre vieme prenášať silu z jedného konca nožničiek na druhý, ktorým striháme. Nožničku sú vlastne iba spojené dve dvojramenné páky, takže použijeme takýto jednoduchý model. Ak uvážime, že dlhé ramená nožničiek majú dĺžku 5 cm, nechty si strihᴀme na opačnom konci asi 0,5 cm od osi otáčania a oboma prstami pôsobíme silou F, tak na nechty budú nožničky pôsobiť silou $20F$[1]

Pri klieštikoch je to trochu komplikovanejšie. Keď sa na ne pozriete, zistíte, že sú zložené z dvoch jednoramenných pák. My sme si ich premerali. Tá prvá, ktorá je na vrchu má dĺžku 4 cm a vydutina, ktorá stláča spodnú páku, je vo vzdialenosti 1 cm od osi otáčania a teda sila, ktorou pôsobime na spodnú páku bude $4F$.

A teraz tá spodná páka. Miesto kontaktu s vydutinou je 4 cm od osi otáčania a ostrie klieštikov je vzdialené od osi ešte o centrimeter viac. Takže to znamená, že vo výsledku bude sila na vrchnom ostrí $3{,}2F$ a keďže máme ostria dve, tak povedzme, že bude maximálne $8F$. A to je stále menej ako polovica zo sily, ktorú dokážeme dosiahnúť nožničkami. Samozrejme mohli by ste povedať, že sme schválne zobrali malé klieštiky, no keď sa nad tým zamyslíte, tak majú porovnateľnú veľkosť s nožničkami.

Druhý efekt je tlak. Nožničky majú ostrie vždy šikmo a teda tlačia na necht menšou plochou. Takže sila bude spôsobovať vyšší tlak, ako keby sa dotýkali nechtu celou plochou. Veď predsa platí $p = \frac{F}{S}$. Naopak klieštiky, tam sa musí sila rozložiť na celú plochu ostria, čo je odhadom desaťkrát viac, ako je plocha ostria nožníc. Čiže ak by aj obe ostria pôsobili rovnakou silou na necht, tak tlak klieštikov by bol desaťkrát menší ako nožníc.

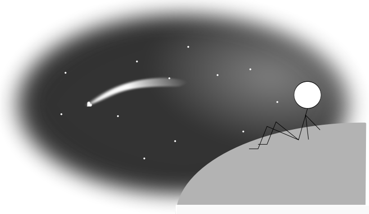
Pripomíname, toto sú len odhady, no už aj s takými jednoduchými znalosťami fyziky, ako je páka a tlak, vieme zodpovedať pomerne zaujímavé otázky :)

[1] Prečo? Stačí si uvedomiť, že na oboch stranách páky musí byť rovnaký moment sily, pričom vieme, že $M = Fr$. A keďže jedno rameno je desaťkrát dlhšie ako druhé, a pôsobíme dvoma prstami, tak nám vznikne faktor 20.

1.2 Meteory

vzorák **Marek**, opravoval **Marek**

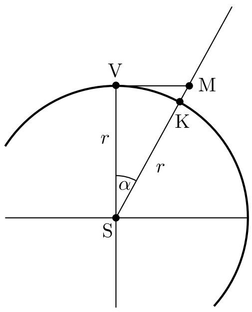
Matúš a Zuzka chceli spolu pozorovať Perzeidy. Nevyšlo im to však, pretože on bol vo Vrbovom a ona v Kurtáni. No napadla im kvôli tomu otázka. Ako najnižšie v atmosfére môže byť nejaký objekt kolmo nad jedným, aby ho ešte videl aj ten druhý?



Bez nejakých veľkých omáčok sa pustíme rovno do riešenia úlohy, ako ste iste spravili aj vy. Najprv začneme hľadať, čo a ako by sa dalo spraviť. Napríklad si zistíme, že aj Vrbové, aj Kurtáň sú v približne rovnakej nadmorskej výške 180 m nad morom. Ďalej sa poobzeráme, že v okolí Vrbového smerom na Kurtáň žiadne kopce nie sú. Ale keď sa pozrieme na Kurtáň, vidíme na západe kopec, ktorý môže všetko pokaziť.

Lenže Zuzka je múdra a preto sa postaví na pole severovýchodne od Kurtáňa, aby mohla pozorovať Perzeidy nad Vrbovým bez pokazeného výhľadu či svetelného smogu. Takže z neuchopiteľnej úlohy zrazu máme už len úlohu na guli. A tú ešte zjednodušíme o to, že pomocou nejakého programu zistíme vzdialenosť vzdušnou čiarou. Samozrejme, dá sa aj vypočítať, ale to nie je predmetom tejto úlohy. Zistíme, že Kurtáň a Vrbové sú od seba vzdialené 157,9 km, a taktiež zistíme aj relevantný údaj – polomer Zeme, ktorý je rovný 6 371 km.

Teraz si stačí uvedomiť, že my riešime úlohu o rovnoramennom trojuholníku, kružnici a pravouhlom trojuholníku. Prečo toto všetko? Z rovnoramenného trojuholníka zistíme uhlovú vzdialenosť medzi Kurtáňom a Vrbovým. Keďže otázka znie ako najnižšie môže byť pozorovaný objekt, tak sa vlastne otázka pýta, ako vysoko bol objekt, ak sa Matúš pozeral dotyčnicovo k zemi (kružnici). No a teda po tomto uvedomení zistíme, že posledné, čo nám chýba k šťastiu je zrátať dĺžky strán pravouhlého trojuholníka.



Obrázok 1: *padajúci meteor*

Najprv teda zistíme uhol Kurtáň, stred Zeme, Vrbové, takže využijeme buď kosínusovú vetu alebo ešte jednoduchšie si môžeme rozdeliť rovnoramenný trojuholník na dva pravouhlé a to už jednoducho zrátať. Body, a vzdialenosti označme ako na obrázku, z usečku $|KV|$, ktorá je pre malé uhly totožná s oblúkom $|KV|$, a r polomer Zeme. Dostávame teda

$$z^2 = 2r^2(1 - \cos\alpha)$$

alebo

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{z}{2}}{r}.$$

Dopočítame sa k $\alpha = 1{,}42$. No a teraz zrátame dĺžku úsečky $|SM|$, čo urobíme jednoducho, keďže sme si povedali, že trojuholník SVM je pravouhlý, a potom odrátame od nej polomer Zeme. Čiže dospejeme k výsledku v tvare

$$|MK| = \frac{r}{\cos\alpha} - r \doteq 1\ 957\,\mathrm{m}.$$

A teda nezostáva nám už nič iné, len poznamenať, že objekt, ktorý by mohli Matúš a Zuzka spolu pozorovať mohol byť najnižšie vo výške asi 2 km.

1.3 Ľadové kocky

vzorák **Kubo Hluško**, opravoval **Kubo Hluško**

Terka chce odmerať reálny výkon mrazničky. Na to si na pomoc zobrala kocky ľadu, ktoré dala do mrazničky, a zmerala čas, kým nezamrzli. Skúste to aj vy: odmerajte skutočný výkon mrazničky a porovnajte ho s údajmi, ktoré udáva výrobca.

Najskôr si treba uvedomiť, že tepelný výkon, ktorý treba odmerať, je teplo (respektíve tepelná energia), ktoré zariadenie dodá alebo odoberie[2] za nejaký čas, teda $P = Q/t$. Teplo Q nebude v našom prípade nič iné ako teplo, ktoré treba odobrať vode, aby sa z nej stal ľad. To vypočítame zo známeho vzorca $Q = cm\Delta t$. Ale týmto vzorcom dostaneme iba teplo potrebné na schladenie vody na 0 °C. Okrem toho musí ešte zamrznúť, teda zmeniť sa z vody o teplote 0 °C na ľad o rovnakej teplote.

Tu sa stretávame so *skupenským teplom*, tiež nazývaným *latentné teplo*. To je pre niektorých z vás možno novinkou. Totiž, ak látka mení svoje skupenstvo, potrebuje na to nejaké teplo. Pravidlom je, že látka teplo prijíma, ak prechádza do „menej pevného“ skupenstva (teda sa vyparuje alebo topí, či dokonca sublimuje) a naopak, ak prechádza do pevnejšieho skupenstva (teda tuhne, kondenzuje, alebo desublimuje), látka teplo odovzdáva okoliu. A tak to bude aj v tomto prípade. Skupenské teplo sa počíta veľmi jednoducho – vzorec vyzerá $L_\mathrm{t} = l_\mathrm{t} \cdot m$, kde L_t je samotné skupenské teplo topenia a l_t je merné skupenské teplo topenia – teda koľko tepla je treba na roztopenie jedného kilogramu látky, alebo naopak koľko tepla zo seba látka vydá, keď ju zmrazíme. Túto hodnotu nájdeme v tabuľkách, na internete[3], či v inom overenom zdroji. Celkové teplo ktoré musí chladnička odobrať teda $Q_\mathrm{c} = c_\mathrm{voda} m\Delta t_1 + l_\mathrm{t} m + c_\mathrm{ľad} m\Delta t_2$.

Aby sme prešli k experimentálnej časti, bolo treba sa zamyslieť nad viacerými vecami. Ako experiment urobiť, koľkokrát ho opakovať, ako zaznamenať výsledky a nakoniec, ako vlastne zhodnotiť to, čo sme namerali, akú to má presnosť a či sme náhodou niekde nespravili chybu. Strčiť vodu do chladničky je pomerne jednoduché, ale dáta musíte vhodne spracovať (tu stačí len tabuľka), treba aspoň raz zopakovať meranie (v tomto prípade experiment trvá dosť dlho, takže nebudeme robiť 10 meraní, stačia dve alebo tri) a niečo o analýze si povieme až na konci.

Nám v našej mrazničke zamrzlo 50 ml vody za 2 hodiny, teda potrebná energia bola $Q_\mathrm{c} = cm\Delta t + l_\mathrm{t} m$, kde $c_\mathrm{voda} = 4{,}18\,\mathrm{kJkg^{-1}{}^\circ C^{-1}}$, $l_\mathrm{voda} = 334\,\mathrm{kJkg^{-1}}$, $m_\mathrm{voda} = 50\,\mathrm{g}$ a $\Delta t = 20\,^\circ\mathrm{C}$, lebo sme chladili z izbovej teploty (20 stupňov) na bod mrazu. Preto môžeme zrátať $Q_\mathrm{c} = 4{,}18\,\mathrm{kJkg^{-1}{}^\circ C^{-1}} \cdot 0{,}05\,\mathrm{kg} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C} + 334\,\mathrm{kJkg^{-1}} \cdot 0{,}05\,\mathrm{kg} = 4{,}18\,\mathrm{kJ} + 16{,}7\,\mathrm{kJ} = 20{,}88\,\mathrm{kJ}$.

Mraznička teda zvládla (po prevode jednotiek, ktorý všetci iste zvládate) odviesť 20 880 J za 7 200 s, teda jej reálny výkon, ktorý sme odmerali, bol 2,9 W. My sme spravili ešte jedno meranie, s mierne odlišným množstvom vody, vidíte to v tabuľke. Výsledok oproti prvému meraniu neprekvapil. Ešte treba dodať, že strhávame body za to, ak ste robili viac meraní naraz v jednej mrazničke a neprehlásili ste to za jedno meranie. Ovplyvňuje to výsledok, zamyslite sa prečo.

[2] Záleží od toho, či je to špirála, chladnička lebo niečo iné
[3] dobrým pomocníkom býva anglická Wikipedia

Meranie	m	Q	t	P
1	0,05 kg	20,88 kJ	2 h	2,9 W
2	0,07 kg	29,23 kJ	2,66 h	3,05 W

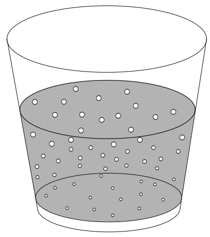
Priemerný nameraný výkon mrazničky môžeme teda zaokrúhliť na 3 W. Výrobca uvádza, že výkon mrazničky je až 150 W! Záver teda je, že ***výrobca nám klame***, alebo ***máme pokazenú mrazničku***, či dokonca ***sa za tento výsledok máme hanbiť a nenapísať ho***.

Nie. Experimentálka nemusí vždy vyjsť podľa očakavánia a netreba sa za to hanbiť. To by nám ten výkon musel vyjsť aspoň 2× väčší ako udáva výrobca. Radšej sa treba zamyslieť nad tým, prečo to tak bolo. Napríklad my sme na meranie používal kombinovanú chladničku a z tých 150 W na mrazničku zostáva (po prepočtoch a porovnaním s inými výrobkami cez podivné udávanie mrazenia ako 5 kg/24 h) len čosi okolo 60 W. Náš ľad bol navrchu mrazničky, a ako vieme, hore sa drží teplý vzduch. Okrem toho mraznička nie je dokonale odizolovaná a to, čo vlastne robí je, že vyrovnáva tepelné straty – chladí teplý vzduch, ktorý do nej príde zvonku. Okrem toho musí z izbovej teploty ochladiť aj nádobku, čo sme nezarátali. A teplý vzduch sa dnu dostáva aj pri kontrolovaní, či nám to už zamrzlo. Ak ste kontrolovali dosť často, iste ste si všimli, že voda začala mrznúť zvonku. Kým sme čakali na zamrznutie, zamrznuté sa ďalej chladilo na teplotu prostredia v mrazničke. Takže vidíme, že nám to nemusí vždy vyjsť podľa očakávania, a na jednoduchej úrovni je ťažko povedať, ktoré ďalšie efekty sme nezapočítali a akú majú váhu. No v súčte zjavne veľkú. Nakoniec už len prajeme veľa zdaru pri experimentálkach!

1.4 Bublinky

vzorák **Maťo G.**, opravoval **?**

Kubo sa naposledy zamýšľal nad otázkou, prečo sa bublinky zväčšujú, keď stúpajú bližšie k hladine. Nedokázal však prísť na to, kde je pes zakopaný. Vyriešte tento problém za neho!



Na celú úlohu si stačilo len uvedomiť pár faktov a nakoniec ich spojiť. Prvým faktom je, že plyny sú stlačiteľné a keď ich chceme stlačiť, musíme na ne pôsobiť silou, ktorá rastie so stlačením. Ľahko sa o tomto presvedčíme tak, že zoberieme striekačku, zapcháme otvor a stlačíme ju – skúste si to.

Toto je spôsobené tým, že plyn sa skladá z veľkého počtu rýchlych molekúl, ktoré narážajú o steny nádoby, v ktorej sa plyn nachádza. Preto plyn tlačí na stenu nádoby silou, ktorú voláme *tlaková sila*[4]. Molekuly sú však v plyne *nariedko* – sú medzi nimi veľké medzery, a teda na stenu nádoby môžeme jednoducho zatlačiť zvonka a plyn sa tým stlačí do menšieho objemu. Molekuly sa však vtedy urýchlia o pohybujúcu sa stenu, začnú tlačiť čím ďalej, tým viac, až sa tlaková sila vzduchu vyrovná sile, ktorou tlačíme na piest (na piest zvonka ešte tlačí aj okolitý vzduch, tieto dve sily sa spolu sčítavajú).

Ďalším faktom bude zvyšovanie hydrostatického tlaku vody so zvyšujúcou sa hĺbkou. Tento jav je dobre cítiť pri potápaní, zvyšovanie tlaku je cítiť najmä zvyšujúcou sa bolesťou v uchu. Pôvod je v tiažovej sile pôsobiacej

[4]Tlak vzduchu, ktorý skôr poznáte, je len tlaková sila pripadajúca na jednotku plochy, na ktorú pôsobí.

na vodu. Tiažová sila sa „snaží“ vodu tlačiť nadol, čím ju veľmi máličko aj stláča[5] a takto stlačená voda potom pôsobí na potápača zo všetkých strán hydrostatickou tlakovou silou.

Teraz sa prizrime na úlohu. Keď sa bublina nachádza vo vode, je stláčaná tlakovou silou, ktorá je vo vode. Táto sila je iba tlak vynásobený plochou, na ktorú pôsobí, čiže povrchom bubliny. Tento tlak vo vode sa zvyšuje so zvyšujúcou sa hĺbkou, lebo jeho podstatná časť je tvorená práve hydrostatickým tlakom.[6] Potom sa však aj stlačenie bubliny zvyšuje so zvyšujúcou sa hĺbkou, a teda bublina sa počas svojej cesty nahor zväčšuje.

1.5 Ako maku

vzorák **Adam Šánta**, opravoval **Adam Šánta**

Enka má strašne rada mak a ku šťastiu jej už len chýba vedieť, koľko takých zrniečok maku sa skrýva v 250 g vrecku maku. Keďže je lenivá si to spočítať, chcela by to vedieť od Vás :). Enka nepotrebuje vedieť presný počet zrniečok, postačí jej aj odhad. Plný počet bodov dostanete, ak Váš výsledok bude v rozmedzí jednej desatiny správneho výsledku až desaťnásobku správneho výsledku, no musí byť odôvodnený. Nestačí tipovať.

Ako každú úlohu (a odhadovačku obzvlášť) je možné riešiť nespočetnými spôsobmi, tak aj na túto existuje hneď niekoľko postupov.

Ako prvý postup mohlo mnohým napadnúť jednoducho nasypať mak na kuchynskú či laboratórnu váhu, odvážiť, predeliť hmotnosť počtom nasypaných zrniečok, a mali by sme priemernú hmotnosť jedného zrnka. Obyčajná kuchynská váha váži s presnosťou na jeden gram. A tu sa dostávame k problému. Jeden gram maku je predsa strašne veľa zrniečok. Ak by sme sa teda rozhodli použiť tento spôsob, dostali by sme veľmi nepresné výsledky, nehovoriac o tom, že by sme veľakrát museli spočítať hoci aj tisíc zrniečok maku. A to sa predsa nikomu nechce.

Lepší nápad by bol použiť laboratórnu váhu, ktorú ale doma deň pred termínom[7] väčšina riešiteľov nemá. Presnosť takýchto váh sa rádovo pohybuje na úrovni desatiny gramu. To ale tiež nie je dosť presné pre spočítateľné množstvo – najviac okolo 300 zrniek maku. Váha má najmenší dielik 0,05 g pričom tvrdí, že 300 zrniek váži 0,1 g. A teda hmotnosť 300 zrniek sa pohybuje na škále medzi 0,05 g až 0,15 g, čo je nie tak presné ako by sme chceli. Navyše váhy sú častokrát nepresné na začiatku svojej stupnice. Veď potom by v štvrťkilovom vrecku maku mohlo byť pol milióna až jeden a pol milióna zrniečok[8]

Jednoduchý spôsob, akým sa dá takéto presnejšie meranie uskutočniť aj doma je meranie pomocou páky. Môžeme použiť napríklad pravítko, ako misky sa hodia plechové držiaky čajových sviečok alebo malé plastové poháriky. Celú páku môžeme oprieť o ceruzku, ideálne oblú. Pri dvojramennej páke musí platiť, že výsledné momenty síl vzhľadom na bod, v ktorom je páka podopieraná – teda os otáčania - sa rovnajú. Uvedomíme si, aké sily v celom systéme pôsobia. Na oboch stranách pôsobí na koncoch ramien tiaž misiek a tiaž maku/závažia, ktorým sú misky naplnené. Nesmieme ale zabudnúť na tiaž pravítka, ktoré má v porovnaní s ostatnými telesami nezanedbateľnú hmotnosť. Ak má teda naša páka napríklad ramená dĺžky r a $2r$, ťažisko pravítka bude ležať vo vzdialenosti $r/2$ od osi otáčania.

Náš systém musí teda spĺňať rovnosť

$$2m_{\text{mak}}r + 2m_{\text{miska}}r + \frac{m_{\text{pravítko}}r}{2} = m_{\text{závažie}}r + m_{\text{miska}}r,$$

takže dostaneme

$$m_{\text{mak}} = \frac{2m_{\text{závažie}} - 2m_{\text{miska}} - m_{\text{pravítko}}}{4}.$$

[5] Síce stlačiteľná je, no jej stlačenie je tak malé, že v hĺbke jeden meter sa objemovo stlačí len o približne tisícinu percenta.
[6] Zvyšok je tlak vzduchu na povrchu vody. Tlak vo vode tak vždy je hydrostatický + atmosférický na hladine.
[7] Áno my vieme, že mnohí z vás riešia úlohy neskoro. Ale tak vám treba, nemáte potom presné laboratórne váhy :P
[8] Áno, úlohu by ste asi rádovo splnili, ale my chceme byť ešte presnejší.

Teraz si už len napočítame napríklad 300 zrniečok maku (alebo akékoľvek iné množstvo, ktorého hmotnosť – teda m_{mak} už nebude približná nule). Tieto umiestnime do misky na dlhšom ramene. Následne túto hmotnosť vyvážime na opačnom, kratšom ramene, ľubovoľným závažím, ktorého hmotnosť $m_{\text{závažie}}$ po vyvážení zistíme vážením na váhe. Zostáva nám už len dosadiť do vzorca číselné hodnoty a výsledok predeliť 300, čím dostaneme hmotnosť jedného zrnka. Pri našich meraniach sa toto číslo pohybovalo v intervale medzi 0,002 g až 0,006 g, čo je dosť presné na rádový odhad hmotnosti jedného zrniečka. A teda, aby sme zodpovedali otázku, tak v štvrťkilovom sáčku môže byť rádovo sto tisíc zrniečok maku.