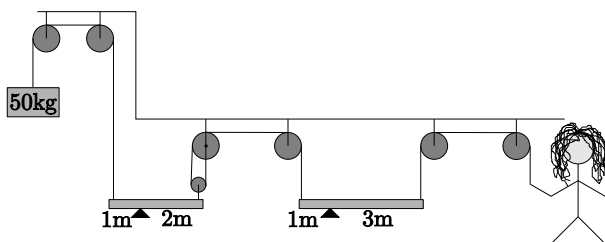


Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2015/2016

2.1 Kladky (opravovali Marek M., Adam Š., Jakub K., vzorák Marek M.)

Akou silou musí Enka ťahať za lano na obrázku aby udržala závažie na opačnej strane vo vzduchu?



Obr. 1: Kladkostroj

Pred tým než vôbec pristúpime k riešeniu si spravíme malý myšlienkový experiment. Predstavme si, že Enka a jej kamarátka Marienka sa pretahujú lanom. Enka si však povedala, že aj keď je silnejšia, bude ťahať len tak silno, aby ju Marienka neutiahla. Potom budú obe stáť na mieste a ťahať silou F , no nepohnú sa. Ako to vyzerá, keď Enka ťahá za laná v našom príklade? Úplne rovnako, lebo jediné čo chceme je to, aby sa to nehýbalo. Takže všetky sily musia byť v rovnováhe (samozrejme aj momenty síl). Podme sa teda pozrieť na to podrobne. (Mimochodom, všetko potrebné ste mohli nájsť na ufo.fks.sk/studijne_materialy → Ďalšie materialy → Kladky.)

Označme F_g silu ktorou je priťahované teleso zemou. Teda $F_g = mg = 490,5 \text{ N}$ kde $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Proti tejto sile pôsobí sila od lana, nazvime ju T , aby boli tieto sily v rovnováhe musí platiť $T = 500 \text{ N}$. Čo ďalej? Máme tu kladku. Vieme, že aj tá musí byť v pokoji, čiže výslednice síl aj momentov síl musia byť nulové. Po chvíľke zamyslenia prideme na to, že aj z druhej strany kladiek musí byť lano napínané silou T .¹ Analogicky budeme postupovať aj ďalej.

Na ľavú časť páky pôsobí T od lana v smere nahor. Teraz príde ďalší zásadný krok. Na to aby Páka bola v rovnováhe musí byť v rovnováhe $F_1 L_1 = F_2 L_2$, čiže momenty síl.

¹Sily od závesov kladiek budeme teraz veselo ignorovať, keďže pôsobia v strede a teda je od nich nulový moment síl.

V Enkinom prípade je to $T \cdot 1 \text{ m} = X \cdot 2 \text{ m}$, a teda sila, ktorá pôsobí z druhej strany páky je $X = T/2$.

Podme ďalej. Na menšiu spodnú kladku pôsobí sila $T/2$ od páky. Aby sme udržali túto kladku na mieste musíme pôsobiť nejakými silami L vľavo a P vpravo. Ak by bola jedna väčšia ako druhá, tak sa systém dá do pohybu, a preto $L = P = T/4$ a obe idú smerom hore, teda kompenzujú silu od páky.

Teraz už jednoducho dopočítame zvyšok, rovnako ako v predchádzajúcich krokoch. Bystré oko už vidí, že sila, ktorou musí pôsobiť Enka, má veľkosť $\frac{mg}{12} \doteq 40,9 \text{ N}$.

2.2 Podvodná (opravoval Samko, vzorák Jarka)

Lovkyňa pokladov Tina našla v mori zlatý poklad. Ihneď chcela vedieť, koľko na ňom zarobí, a preto si ho ešte na dne silomerom odvážila a zistila, že má presne $0,2 \text{ kg}$. Koľko na ňom zarobí, ak 1 kg zlata stojí $32\,000 \text{ €}$? Všetky ostatné potrebné údaje nájdite v tabuľkách, na internete alebo ich odhadnite.

Tina na dne silomerom namerala, že zlato váži $m_1 = 0,2 \text{ kg}$. No takáto váha neukazuje skutočnú hmotnosť telesa. Silomer meria veľkosť celkovej sily, ktorá naň pôsobí, a z tejto hodnoty zistí hmotnosť. Takáto váha funguje len na súši, kde silomer natahuje len ťažovú silu (určite poznáte vzťah $F_g = mg$). Pod vodou nastáva problém. Na teleso okrem ťažovej sily pôsobí aj vztlaková sila, ktorá pôsobí opačným smerom. Silomerová váha teda nepočíta iba s ťažovou silou, ale aj so vztlakovou silou. Pre výslednicu síl (nameranú silomerom) platí:

$$F = F_g - F_{vz},$$

$$m_1 g = mg - V g \rho_{\text{H}_2\text{O}}.$$

Objem zlata sa dá vyjadriť pomocou hmotnosti a hustoty:

$$m_1 g = mg - \frac{m}{\rho_{\text{Au}}} g \rho_{\text{H}_2\text{O}}.$$

Úpravou tohto výrazu dostaneme:

$$m = \frac{m_1}{1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Au}}}}.$$

Vieme, že hustota vody je $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a hustota zlata je $19\,300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a teda dostávame

$$m = \frac{0,2 \text{ kg}}{1 - \frac{1000 \text{ kg/m}^3}{19\,300 \text{ kg/m}^3}} = 0,21 \text{ kg}.$$

Keď poznáme hmotnosť nájseného zlata, ľahko zistíme, koľko penazí za to Tina dostane:

$$0,21 \cdot 32\,000 = 6720.$$

2.3 Magické magnety (opravovali Dušan, Marcel P., Kubo H., vzorák Dušan)

Jerguša ako malého vždy fascinovali magnety. Vždy chcel vedieť ako vlastne závisí sila od vzdialenosti, ktorou sa medzi sebou priťahujú dva magnety, no nikdy sa mu to nepodarilo zistiť. O pomoc by preto rád poprosil Vás. Zoberte si preto dva rovnaké magnety, napr. z chladničky a skúste namerať ako

závisí sila, ktorou sa priťahujú magnety od ich vzájomnej vzdialenosti. Medzi magnety odporúčame dávať papier alebo podobný materiál, ktorým budete môcť meniť vzdialenosť medzi magnetmi. Jeden magnet môžete pripevniť napríklad nejaký kovový predmet, napr. o zárubeň dverí, a druhý k nemu zo spodu prikladať. Na meranie sily môžete použiť závažie, ktoré pripevníte k spodnému magnetu. Ako závažie môžete použiť množstvo predmetov, ktoré nájdete doma (vodu, cukor, ...). Experiment navrhujeme realizovať tak, že budete postupne zvyšovať hmotnosť a v okamihu, keď sa magnety oddelia, si na kuchynskej váhe odvážite hmotnosť závažia.

Na tento experiment sme sa rozhodli použiť 2 neodýmové magnety, silomer, lepiacu pásku, niekoľko kancelárskych A4 a mikrometrickú skrutku. No na rozdiel od toho, ako nám radilo zadanie, sme si postavili aparátúru trochu inak. Chceli sme predsa zmerať iba silu medzi magnetmi, takže aparátúru sme odizolovali od všetkého, aspoň trochu magnetickeho. Jeden magnet sme prilepili páskou o drevený stôl² a druhý sme rovnako prilepili k silomeru.

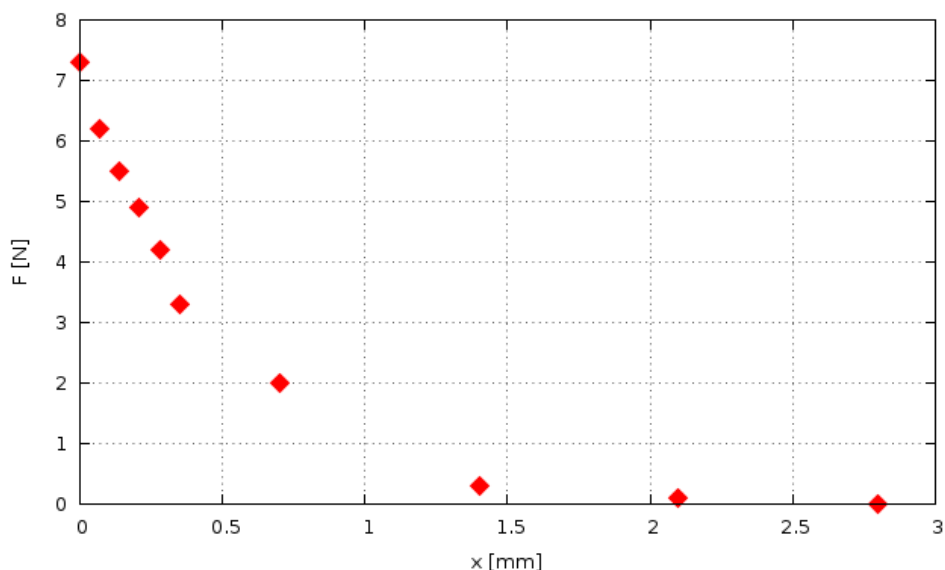
Čo bolo potom? Proste sme medzi magnety vkladali niekoľko hárkov papiera a potom opatrne ťahali silomer, až kým sa od seba neodtrhli. Samozrejme, mohli sme miesto silomeru zavesiť na druhý magnet závažia a merať, akú hmotnosť to spojenie vydrží. Mohlo by to byť presnejšie, no pri experimentoch sa ukázalo, že aj po viacerých pokusoch sme dostávali tie isté výsledky, čo je len a len dobré. Takže sa uspokojíme s presnosťou 0,1 N.

Ako sme spomenuli, medzi meraniami neboli rozdieli, pri našej presnosti, takže uvedieme, vždy len jednu hodnotu sily k danej vzdialenosti magnetov. „Tadáá“ namerali sme toto:

x [mm]	F [N]
0	7,3
0,07	6,2
0,14	5,5
0,21	4,9
0,28	4,2
0,35	3,3
0,7	2
1,4	0,3
2,1	0,1
2,8	0,0

Tab. 1: Sila medzi magnetmi v závislosti od ich vzdialenosti

²Samozrejme, že sme magnet oblepili iba zboku, aby sme mohli merať silu medzi magnetmi pri nulovej vzdialenosti.



Obr. 2: Graf závislosti sily od vzdialenosti

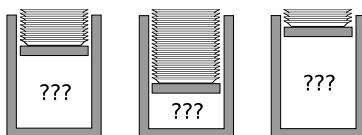
Vidíme, že sme namerali presne to, čo by nám mala povedať intuícia. S pribúdajúcou vzdialenosťou medzi magnetmi, sila rapídne klesá. To si určite všimol každý, kto niekedy držal magnety v ruke.

Zostáva posledné, zamyslieť sa nad možnými zdrojmi nepresností nášho merania. Vzdialenosť sme merali naozaj presne, na desiatky mikrónov, čiže tam mohla chyba sotva nastať. Merania sme zopakovali dostatočne veľa krát, takže zdrojom chýb mohlo byť meranie samotnej sily. (Ak neuvažujeme výrazné zmeny okolia, samozrejme.) Ako sme povedali, naša presnosť nebola priveľká, no vzhľadom na namerané hodnoty postačujúca. S chybou na úrovni 0,1 N vieme žiť :)

2.4 Záhadné zariadenie (opravovali Katka K., Tereza, Kebab, vzorák Baklažán)

V Edkovej školskej jedálni mali pani kuchárky špeciálne zariadenie na držanie tanierov.

Toto zariadenie malo pohyblivú vodorovnú podložku, na ktorú sa položila hromada tanierov. Podložka potom prispôbila svoju výšku tak, aby bol najvrchnejší tanier hromady vždy v rovnakej výške. Keď teda teta kuchárka na vrch hromady priložila ďalšie tanier, podložka (aj s hromadou) začala klesať a ustálila sa o niečo nižšie. Keď, naopak, zobrala tanier z hromady, podložka trochu stúpala.



Obr. 3: Ustálené zariadenie pri rôznych zaťaženiach

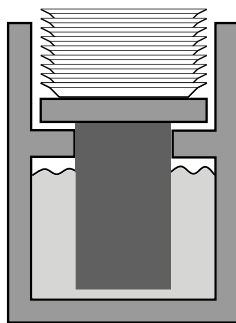
Dokázali by ste vymyslieť mechanické zariadenie, ktoré by fungovalo na takomto princípe? Nakreslite nám vaše zariadenie a poriadne popíšte ako funguje.

Výšku jedného taniera si označme d a veľkosť gravitačnej sily, ktorá pôsobí na jeden tanier označme T .

Zariadenie, ktoré ideme navrhnuť, musí mať nasledovnú vlastnosť: čím viac zatažíme pohyblivú podložku, tým nižšie sa ustáli. Povedané odbornejšie, čím väčšou silou tlačíme zhora na podložku, tým nižšie musí klesnúť na to, aby sila, ktorou podložku tlačí nahor mechanizmus nášho zariadenia, vyrovnala silu, ktorou na podložku tlačíme. Alebo ešte inak, čím nižšie podložku zatlačíme, tým väčšou silou ju bude zariadenie tlačiť nahor. Navyše musí platiť, že vždy, keď podložku zatlačíme o d nižšie, sila, ktorou ju zariadenie tlačí nahor, stúpne o T .

Takéto zariadenie sa dá navrhnuť viacerými spôsobmi. Tu si ukážeme dva z nich – prvý vymyslel Edko, keď sa zamyslel nad tým, ako by zariadenie v jedálni mohlo fungovať, druhým spôsobom zariadenie naozaj funguje.

Spôsob prvý: Vztlak. V tomto riešení využijeme, že vztlaková sila je priamo úmerná objemu ponorenej časti telesa. Zariadenie bude vyzeráť tak, že v spodnej časti bude naliata nejaká kvapalina. K podložke zospodu pripevníme ľahký valcový piest, ktorý bude čiastočne ponorený v kvapaline, teda podložka s piestom budú plávať.



Obr. 4: Prvé riešenie

Prierez piestu označme S_P , prierez nádoby, v ktorej je kvapalina, označme S_N a hustotu kvapaliny označme ρ .

Keď podložku zatlačíme o d nižšie, piest sa ponorí o d hlbšie do kvapaliny a hladina kvapaliny v dôsledku toho o niečo stúpne. Piest svojím klesnutím o d zabral miesto kvapaliny s objemom $V_1 = dS_P$ a hladina má plochu $S_N - S_P$. Aby si kvapalina zachovala svoj objem, musí teda hladina stúpnuť o

$$\frac{dS_P}{S_N - S_P}.$$

Objem ponorenej časti piestu teda stúpne o $(d + \frac{dS_P}{S_N - S_P})S_P$ a vztlaková sila pôsobiaca na piest stúpne o

$$\left(d + \frac{dS_P}{S_N - S_P}\right) S_P \rho g,$$

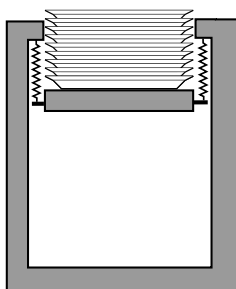
kde g je gravitačné zrýchlenie. Všimnime si, že zväčšenie vztlakovej sily nezávisí od toho, v akej hĺbke piest bol, iba od toho, o koľko hlbšie sme ho zatlačili. Navyše, vhodným zvolením prierezu piestu a hustoty kvapaliny môžeme docieľiť, že zatlačením podložky o d nižšie stúpne vztlaková sila o T . A to bez ohľadu na to, v akej hĺbke podložka bola, čo je presne to, čo potrebujeme.

Spôsob druhý: Pružiny. Tento spôsob využíva jednu zaujímavú vlastnosť pružín. Keď pružinu chytíme za konce a natiahneme, bude pružina ťahať obe naše ruky k sebe nejakou silou. Tieto dve sily budú mať rovnakú veľkosť a táto veľkosť bude priamo úmerná predĺženiu³ pružiny. Formálne sa to zapisuje takto:

$$F = kx,$$

kde F je veľkosť síl, ktorými pružina ťahá naše ruky, x je predĺženie pružiny a k je *tuhosť* pružiny – číslo, ktoré udáva, aké ťažké je danú pružinu ťahať. Toto číslo sa pre rôzne pružiny líši, pre jednu pružinu je však vždy rovnaké. Jednotkou tuhosti je $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Zariadenie bude vyzeráť veľmi jednoducho: podložku zavesíme na štyri rovnaké pružiny, každú s tuhosťou $k = \frac{T}{4d}$.



Obr. 5: Druhé riešenie

Vždy, keď podložku zatlačíme o d nižšie, predĺžia sa všetky štyri pružiny o d . Sila, ktorou podložku ťahajú nahor, sa teda zväčší pre každú pružinu o kd , čiže dokopy budú podložku ťahať nahor silou o $4kd = T$ väčšou, než predtým. A to je presne to, čo potrebujeme, len stačí zvoliť správnu tuhosť pružiny.

2.5 Ekologická (opravoval Baklažán, vzorák Jimi)

Viete si predstaviť, koľko minú takí vedúci pri spravovaní seminára papiera? Nuž, neúrekom. Preto je super, keď posielate elektronické riešenia. Ťažšie sa strácajú a navyše šetria naše lesy. Otázkou stále zostáva, akou mierou tým viete byť ekologickí. Skúste odhadnúť, koľko stromov ušetríte posielaním elektronických riešení UFa namiesto papierových. V riešení, ktoré dostane plný počet bodov očakávame poriadne okomentovaný postup spolu s odhadmi a zdrojmi, na základe ktorých ste tieto odhady vypočítali.

Najdôležitejšie na tomto príklade bolo zohnať si dobré zdroje - preto sme v internetovom vyhľadávači zadal kľúčové slová „Papier“ a „výroba“. Po chvíli sa nám podarilo nájsť tento dokument: <http://bit.ly/1Pq1Moo>. V ňom sa uvádza, že papier (z Ružomberka) sa skladá zo 75% z celulózy, a z 25% rôznych iných prímiesí, ako vody, plnidla alebo škrobu. Tiež v ňom nájdeme ingrediencie na výrobu celulózy: Na jednu tonu celulózy treba štyri tony dreva. Z toho si jednoduchospočítame, že na jednu tonu papiera je vlastne potrebné zohnať 3 tony surového dreva.

³Predĺženie je rozdiel medzi dĺžkou, na ktorú sme pružinu natiahli a dĺžkou, ktorú má pružina v pokoji, keď ju nič nenatahuje.

Poslané riešenia však neposielame na tony, ale skôr na gramy. Podľa pravidiel treba posilať príklady na papieri formátu A4, ktorý má rozmery⁴ 210 mm × 297 mm, čo je 0,062 37 m². Po hľadaní po rôznych obchodoch (ktoré nejdeme menovať) zistíme, že bežný kancelársky papier má 80 $\frac{\text{g}}{\text{m}^2}$. Po vynásobení dostávame, že jeden papier A4 teda má hmotnosť 4,989 gramov, čo zaokrúhlime na 5 gramov. Bežné riešenie sa zmestí na jeden papier, ale často sú potrebné aj dva. Predpokladajme, že sme frajeri a posielame všetkých 5 príkladov, z čoho na jeden potrebujeme 2 papiere - spolu 6 × A4. Nesmieme ale zabudnúť na obálku! Tú odhadneme, že má asi toľko papierovej hmoty ako A4, takže ju zarátame ako siedmy list. Spolu teda máme 35 gramov papiera.

Na začiatku sme si vypočítali, že na jednotku hmotnosti papiera treba trojnásobnú hmotnosť dreva, teda na naše riešenia bude nutné použiť 105 gramov surového dreva. Celkom dosť, že? A to je len spotreba jedného riešiteľa za jednu sériu.

⁴https://sk.wikipedia.org/wiki/Formát_papiera