Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Ortuťové jazero

vzorák **Tomáš P.**, opravovali **Tomáš P.** a **Lukáš G.**

Čo si chceme zistiť pred riešením?

Na vyriešenie tejto úlohy potrebujeme niekoľko informácii, ktoré sme v zadaní nedostali. Napríklad by sme si mohli zistiť hustotu ortute, ktorá je približne 13 530 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$ a tiež si chceme zistiť priemernú hmotnosť človeka, ktorá je 80 kg.

Aké sily tu pôsobia?

Človek s hmotnosťou m pôsobí na ortuť gravitačnou silou rovnou $F_g = mg$, no ortuť na človeka pôsobí vztlakovou silou, o ktorej nám hovorí Archimedov zákon. Jej veľkosť je $F_{vz} = V_p \rho_o g$, kde V_p je objem ponorenej časti telesa, ρ_o je hustota ortute a g je gravitačné zrýchlenie. Časom sa človek dostane do rovnovážnej polohy síl, teda gravitaćná sila, ktorou pôsobí na ortuť, je rovná vztlakovej sile. V tomto momente preto platí:

$$F_g = F_{vz},$$

$$mg = V_p \rho_o g,$$

odkiaľ

$$V_p = \frac{mg}{\rho_o g} = \frac{m}{\rho_o} = \frac{80\ \mathrm{kg}}{13\,530\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}} = 0{,}0059\ \mathrm{m^3} = 5{,}9\ \mathrm{l}.$$

Teraz sme zistili objem ponorenej časti človeka, no ešte nám zostáva zistiť, ako hlboko sme sa ponorili. Podľa hodnoty, ktorá nám vyšla, vieme predpokladať, že sa neponoríme hlbšie ako po kolená. Chodidlo môžeme aproximovať ako kváder a zvyšok nohy ako valec. Na internete sa dá dohľadať priemerná dĺžka chodidla a jej prislúchajúca šírka, z čoho vieme určiť, že prierez chodidla má plochu približne 250 cm^2. Ďalej vieme odhadnúť, že výška chodidla je 5 cm. Keď sa ďalej pozrieme na plochu prierezu nohy nad chodidlom, ide o kruh s priemerom približne rovnakým, ako je šírka chodidla. Preto prierez nohy nad chodidlom má plochu približne 100 cm^2. Ak by sme sa oboma nohami zaborili do výšky h nad chodidlami, vypočítali by sme ponorený objem nôh V_n ako

$$V_n = 2\left(250\ \mathrm{cm^2} \cdot 5\ \mathrm{cm} + 100\ \mathrm{cm^2} \cdot h\right).$$

My však ale vieme, že ponorený objem je $V_p = 5{,}9\ \mathrm{l} = 5900\ \mathrm{cm^3}$, čo vieme do tejto rovnice dosadiť, a vyjadriť z nej výšku h.

$$5900\ \mathrm{cm^3} = 2500\ \mathrm{cm^3} + 200\ \mathrm{cm^2} \cdot h,$$

$$5900\ \mathrm{cm^3} - 2500\ \mathrm{cm^3} = 200\ \mathrm{cm^2} \cdot h,$$

$$h = \frac{5900\ \mathrm{cm^3} - 2500\ \mathrm{cm^3}}{200\ \mathrm{cm^2}} = \frac{3400\ \mathrm{cm^3}}{200\ \mathrm{cm^2}} = 17\ \mathrm{cm}.$$

Hodnota h, ktorú sme vypočítali, je však výška ponorenej nohy nad chodidlom a musíme ešte pridať 5 cm, teda výšku chodidla.

Finálny výsledok preto je, že sa do ortute sa zaboríme do hĺbky približne 22 cm.

1.2 Chladničkou proti hicu

vzorák **Samo Č.**, opravovali **Samo Č.** a **Marianka**

Kľúčový je poznatok, že chladnička nevyrába zimu. Inými slovami, teplo zvnútra chladnička nelikviduje, len ho presúva von. Na toto dokonca spotrebúva elektrickú energiu, prečo aj musí byť zapojená do zástrčky. Navyše zákon zachovania energie hovorí, že táto elektrická energia sa nemôže stratiť. V prípade chladničky sa premení na ešte ďalšie teplo, čo znamená, že chladnička v Adamovej izbe dokonca teplotu zvýši.

Problém sa dá vyriešiť napríklad tak, že chladničku umiestnime do dverí izby. Jej vnútro s otvorenými dvierkami nasmerujeme smerom do izby a zadnú stranu chladničky na chodbu. Takto využijeme schopnosť chladničky prečerpávať teplo zvnútra von, teda z izby na chodbu.

Čo už nebolo potrebné spomenúť v riešení je, že chladnička na takéto niečo nie je určená a jej prečerpávací výkon je dlhodobo veľmi malý. Trvalo by naozaj dlho, aby vychladila Adamovu izbu, ak by sa jej to vôbec podarilo, pretože do izby teplo zároveň prichádza, napríklad prostredníctvom slnečného žiarenia.

1.3 Umelecké veľdielo

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Skôr, ako začneme merať nejaké veci, si povedzme, ako vlastne taká farba funguje, prečo by mal byť papier ťažší a prečo má zmysel rozprávať sa o účinnosti farieb. Farba ako taká sa skladá z **pigmentu** (najjednoduchšie sa to predstaví ako nejaký prášok), **pojiva** (to je to, čo drží farbu pokope) a **riedidla** (vo vašich bežných farbách voda, pri farbách na drevo alebo kov nejaké uhľovodíkové riedidlo ako napríklad C6000[1] alebo C6006). Vo farbách na kov sa potom ešte nachádzajú nejaké zložky, ktoré majú za úlohu zabezpečiť spojenie farby s podkladom.

Asi jedinú výnimku z tohoto popisu tvoria vodové farby, kde sa nachádza len pigment (to je to tuhé), a ako riedidlo slúži voda, ktorú tam nanášate štetcom.

Čo sa stane po tom, ako nanesieme farbu na materiál (v našom prípade papier)? Udeje sa to, že sa pigment, pojivo a riedidlo nalepí na papier. Po čase pojivo a pigment ostane (papier teda bude ťažší, ako keď tam nebola nanesená žiadna farba), ale riedidlo sa odparí, a teda bude papier ľahší ako tesne po nanesení farby.

Dosť bolo teórie, poďme niečo merať. Spôsob váženia bol nasledovný: zobrali sme papier rozmeru A3, aby sme mali na papieri dostatočne veľa farby a tým minimalizovali chyby merania. Odvážili sme (postupne) všetky papiere, naniesli na ne farbu, odvážili, počkali, kým farba zaschne, a papiere odvážili znovu. Ako spôsoby farbenia sme zvolili tieto metódy: temperové farby, vodové farby, vodou riediteľná farba na stenu, farba v spreji a nakoniec aj ceruzka. Ceruzka nie je taká farba ako sme ju opísali hore, ale funguje len tak, že sa otierajú vrstvy uhlíka (grafitu) o papier.

Vzhľadom k tomu, že hmotnosť papiera sa hýbe rádovo v gramoch, hmotnosť farby sa hýbe ešte v menších číslach a my sme mali len váhu s presnosťou na gramy, rozhodli sme sa pomôcť si menším trikom. Namiesto toho, aby sme vážili papier, urobili sme páku, kde bol na dlhšom ramene zavesený papier a na kratšom bolo zavesené závažie na váhe, ktoré sme nadľahčovali. Keďže kuchynská váha, s ktorou sme merali, má rozsah 1 – 5000 g a výkres formátu

[1] ľudovo nazývaný acetón

A3 váži približne 25 g, tak sme zvolili pomer dĺžky kratšieho a dlhšieho ramena 1 : 100 čím sme sa zmestili do rozsahu na váhe a dostali sme presnosť na stotiny gramov.

Takto vyzerajú výsledky merania:

Druh farby	Váha farby na papieri po uschnutí farby	Rozdiel hmotností farbiva	Účinnosť farby
Farba v spreji	0,51 g	0,89 g	57 %
Farba na stenu	14,73 g	26,12 g	56 %
Ceruzka	1,78 g	1,92 g	93 %
Vodové farby	1,46 g	1,53 g	95 %
Temperové farby	6,18 g	8,25 g	75 %

Z tabuľky vidíme, že papier po nanesení farby bude priemerne ťažší o 35 %. Najväčšiu účinnosť mala podľa očakávania ceruzka, a najmenšiu vodové farby.

Na záver riešenia experimentu slušnosť káže vyjadriť sa k chybám meriania. Čo sa týka našej aparatúry, tak najväčší problém nebol s presnosťou váhy (tá má presnosť ±1 g a pri páke 1 : 100 teda presnosť ±0,01 g), ale s malým rozlíšením váhy (už spomínané rozlíšenie na jednotky gramov). Aj keď sme sa snažili toto rozlíšenie zväčšiť, tak v ideálnom prípade by sme na takéto malé hmotnosti potrebovali váhu s rozlíšením aspoň 0,001 g.

1.4 Opice z našej police

vzorák **Adam** a **Marianka**, opravovali **Adam** a **Marianka**

Čo sa vlastne v úlohe deje

Chovateľ hádže banán neznámou rýchlosťou a pod neznámym uhlom, ktorý máme vypočítať. Nepoznáme uhol, takže nemôžeme počítať hod banánu ako zvislý alebo vodorovný vrh, ale musíme ho počítať ako šikmý vrh pod uhlom, ktorý si označíme napríklad α. Opica pred pustením bola na vrchu stromu a po pustení začala padať smerom dolu bez okolitých vplyvov, čiže ide o voľný pád.

Matematický popis pohybov v úlohe

Na začiatok si musíme uvedomiť, čo znamená, že opica chytí banán. Pre nás to znamená len to, že opica aj banán sa nachádzajú na rovnakom mieste. V tejto úlohe si polohu objektov (banánu a opice) budeme vyjadrovať pomocou 2 súradníc, a to x a y. Súradnica x bude pre vodorovný smer s počiatkom na mieste, kde stojí chovateľ a bude rásť smerom k stromu, na ktorom je opica. Súradnica y bude pre zvislý smer, za ktorého počiatok si určíme rovnako ako vo väčšine ostatných fyzikálnych úloh zem a bude rásť smerom hore. Opica aj banán sa pohybujú, čo znamená, že ich poloha sa mení v čase. Matematicky vieme povedať, že x a y sú funkcie času a zapisujeme ako $x(t)$ a $y(t)$.

Riešenie pomocou pohybujúcej sa vzťažnej sústavy

Na opicu aj banán pôsobí tiažová sila Zeme, preto sa vo zvislom smere budú pohybovať so zrýchlením $-g$.[2]. V takomto prípade vieme celej vzťažnej sústave udeliť zrýchlenie. Keďže toto zrýchlenie je $-g$, opica bude stáť na mieste, a z pohybu banánu sa stane rovnomerný priamočiary pohyb. Tento pohyb budeme opisovať pomocou

[2] $-g$, lebo záporný smer je dole

rýchlosti, ktorú si označíme napríklad v. Keď si túto rýchlosť rozložíme, dostaneme jej zložky $v_x = v\cos\alpha$ a $v_y = v\sin\alpha$. [3] Polohu banánu, preto opisujú funkcie:

$$x_{\text{banan}}(t) = v_x t = vt\cos\alpha$$

$$y_{\text{banan}}(t) = v_y t + h = vt\sin\alpha + h$$

.

Opica svoju polohu nemení, takže pre ňu budú platiť funkcie $x_{\text{opica}}(t) = d$ a $y_{\text{opica}}(t) = H$. Polohy banánu a opice si dáme do rovnosti a dostaneme:

$$d = vt\cos\alpha,$$

$$H = vt\sin\alpha + h.$$

V rovniciach nám vystupuje v a t, ktoré však nepoznáme. Tento problém má veľmi jednoduché riešenie. Tým riešením je, že vydelíme jednu rovnicu druhou. V tomto prípade nezáleží, ktorú rovnicu vydelíme ktorou, preto vo vzoráku budeme pokračovať len jedným zo spôsobov. Po vydelení teda dostaneme:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{H-h}{d}.$$

Podiel sínusu a kosínusu je ďalšia goniometrická funkcia, ktorá sa volá tangens. Dostávame teda rovnicu

$$\tan\alpha = \frac{H-h}{d}.$$

Z tohto už vieme získať hľadaný uhol a dostávame výsledok:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{H-h}{d}\right)$$

Iné riešenie

Najprv sa pozrime na pohyb opice, lebo je jednoduchší. Vo vodorovnom smere sa nám po pustení pohybovať nebude, lebo z rovnovážnej polohy ju uviedla do pohybu len tiažová sila, ktorá však pôsobí len vo zvislom smere. Preto bude platiť, že $x_{\text{opica}}(t) = d$. V zvislom smere ale opica pohyb koná. Tento pohyb sa volá voľný pád a platí preň rovnica $s = \frac{1}{2}gt^2$. Opica padala z výšky H, preto zvislú polohu opice opisuje funkcia $y_{\text{opica}}(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$.

U banánu je pohyb trochu zložitejší. Chovateľ hodí banán nejakou rýchlosťou, označme si ju napríklad v. Túto rýchlosť si musíme rozložiť na jej zložky v x-ovom a y-ovom smere, lebo rýchlosťou v sa banán nepohybuje pozdĺž jednej z osí. Zložky rýchlosti v si označíme ako v_x a v_y. Pomocou goniometrických funkcií si vieme vyjadriť ich hodnoty ako $v_x = v\cos\alpha$ a $v_y = v\sin\alpha$. Vo vodorovnom smere nepôsobí na banán žiadna sila, čiže rýchlosť v_x sa

[3] Ak ti nie je jasné, čo sa tu práve stalo, odporúčam ti prečítať si túto UFOčebnicu: https://ufo.fks.sk/studijne_materialy/_plugin/attachments/download/177/

nebude meniť. Z toho vychádza, že vo vodorovnom smere pôjde o rovnomerný pohyb, pre ktorý platí všeobecný vzorec $s = vt$, a teda bude platiť $x_{\mathrm{banan}}(t) = v_x t = vt\cos\alpha$. V zvislom smere na banán pôsobí tiažová sila, ktorá pôsobí proti smeru pohybu, preto pôjde o rovnomerne spomalený pohyb.

Rovnomerne spomalený pohyb si vieme predstaviť ako 2 pohyby. Jeden rovnomerný a druhý rovnomerne zrýchlený, ale v opačnom smere. Pre rovnomerný pohyb platí vzorec $s = vt$ a pre rovnomerne zrýchlený (v tomto prípade voľný pád) $s = \frac{1}{2}gt^2$. Keď si tieto 2 pohyby spojíme a pridáme počiatočnú výšku, dostaneme, že platí:

$$y_{\mathrm{banan}}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_x t + h = -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\alpha + h.$$

Už vieme presne opísať pohyb opice aj banánu. Vieme, že opica chytí banán, preto musí nastať čas t, pre ktorý bude platiť: $x_{\mathrm{opica}}(t) = x_{\mathrm{banan}}(t)$ a $y_{\mathrm{opica}}(t) = y_{\mathrm{banan}}(t)$. Keď si tieto rovnice rozpíšeme, dostaneme:

$$d = vt\cos\alpha,$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + H = -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\alpha + h.$$

Po úprave dostaneme:

$$d = vt\cos\alpha,$$

$$H = vt\sin\alpha + h.$$

Z čoho môžeme pokračovať rovnakým spôsobom, ako v 1. spôsobe riešenia.

1.5 Nabi bo vybito

vzorák **Danko** a **Adam**, opravovali **Danko** a **Adam**

V prvom bode potrebujeme zistiť, akú má batéria celkovú kapacitu. Kapacita batérie je udávaná v mAh, čiže miliampérhodinách, čo teda popisuje, ako dlho a akým silným prúdom nabíjame batériu, kým sa celá nabije, prepočítané na počet hodín nabíjania prúdom 1 mA.

Aký je fyzikálny zmysel tejto veličiny? Asi viete, že elektrický prúd označuje množstvo elektrického náboja za sekundu (prípadne inak zvolený konštantný časový úsek). Vediac toto, nie je ťažké pojať, že kapacita batérie v zadaní značí veľkosť elektrického náboja, ktorý vie efektívne uskladniť. Pre úplnosť sa patrí spomenúť, že táto kapacita je čosi iné ako elektrická kapacita, s ktorou sa možno stretnúť pri kondenzátoroch. Máme k dispozícii vzťah, ktorý nám hovorí, akým prúdom sa v akom čase batéria nabíjala. Ako je z grafu vidno, ako sa batéria blíži k plnému nabitiu, efektivita nabíjania sa znižuje. Prúd teda pomaly klesá k nule. Po 4 hodinách nabíjania už je takmer nulový, čo hovorí o tom, že batéria dosiahla skoro úplné maximum svojej kapacity a ďalšie nabíjanie môžeme ignorovať, nedopúšťajúc sa veľkej chyby.

Celkovú kapacitu dostaneme tak, že prepočítame prúd počas štyroch hodín nabíjania na potrebnú dĺžku nabíjania prúdom 1 mA. Počas prvej trištvrtehodiny to bude pomerne jednoduché. Vieme že prúd bol 2 A a čas 0,75 h, celkovo sa teda batéria nabila o $2\ \mathrm{h} \cdot 0{,}75\ \mathrm{A} = 1{,}5\ \mathrm{Ah}$. Neskôr to však je zložitejšie, keďže nemáme časový úsek, v ktorom by bol prúd konštantný, a teda nevieme spraviť takýto jednoduchý prepočet. Funkcia, ktorá popisuje správanie sa prúdu v rôznom čase, je pomerne zložitá. Ak ju však zaokrúhlime na úsekoch tak, aby bola konštantná, vieme to jednoducho odhadnúť. Ak zvolíme dostatočne malú veľkosť úseku, v ktorom prehlásime prúd za konštantný, môže nám to stačiť pre zanedbateľnú odchýlku – my sme si zvolili úsek s dĺžkou $\frac{1}{100}$ hodiny.

Nerátali sme však 400 hodnôt prúdu ručne; takéto výpočty si vieme veľmi zjednodušiť použitím tabuľkového kalkulátora, ako je napríklad Excel alebo Google Sheets. Práve v Google Sheets sme si spravili tabuľku, pozrieť si ju môžete pomocou linku[4].

Každý riadok v tabuľke reprezentuje jeden úsek – $\frac{1}{100}$ hodiny, a v každom sme si vypočítali jednotlivé hodnoty potrebné pri riešení tejto úlohy. Do prvého stĺpca sme si teda vypočítali prúd v danom momente pomocou zadaného vzorca a odkazu na bunku s časom. Teraz teda predpokladáme, že v každom úseku dĺžky $\frac{1}{100}$ hodiny je prúd konštantný – taký, ako je napísané v príslušnom riadku. Batéria sa teda za ten úsek nabije o $0{,}01 \cdot [\text{prúd v danom úseku}]\,\mathrm{Ah}$.

Výsledok sme rovno pričítali k celkovému súčtu predošlých výsledkov a zapísali do ďalšieho stĺpca. Dokopy teda na spodku tabuľky dostaneme celkovú kapacitu batérie - tá nám vyšla 2,29 Ah, čo je 2290 mAh. V treťom stĺpci sme podľa druhého vzorca vypočítali napätie v danom časovom úseku, čo použijeme pri rátaní energie. Jej prírastok vyrátame podľa vzorca $\Delta E = U \cdot I \cdot \Delta t$ pričom prúd aj napätie poznáme a čas v každom riadku je 0,01 h, čo je ale v základných jednotkách 36 s. Ak ste sa už s elektrickým napätím niekedy stretli, možno viete, že označuje rozdiel potenciálnej energie náboja medzi dvoma miestami. Prenásobením prúdom (množstvo náboja, ktoré pretečie medzi týmito bodmi za sekundu) a časovým krokom dostaneme vyššie spomenutý vzťah. Tieto hodnoty sme rovno aj sčítali dokopy v ďalšom stĺpci a na spodku nám vyšla celková energia 28 796 J.

Na koľko percent je nabitá batéria po jednej hodine zistíme tak, že vydelíme nabitú kapacitu v čase jednej hodiny maximálnou kapacitou. Podobne, keď poňatú energiu v čase jednej hodiny vydelíme celkovou energiou, dostaneme odpoveď na poslednú otázku. To sme v ďalších stĺpcoch urobili nielen pre čas jednej hodiny, ale aj pre ostatné časové úseky. Výsledky v riadku pre čas jednej hodiny sú približne 81,54 % nabitia a 78,86 % uchovanej energie.

Zistili sme teda, že celková kapacita batérie je 2290 mAh, batéria pojme dokopy 28 796 J energie a v čase jednej hodiny od začiatku nabíjania je nabitá na 81,54 % a uskladnila 78,86 % možnej energie.

[4] `https://fks.page.link/ufo_13_1_5`