Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Ťažké časy

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Je dobré si uvedomiť, že ak má Jaro konštantnú hustotu, tak jeho hmotnosť lineárne závisí na jeho **objeme** - ak pribral toľko, že sa jeho objem zväčšil x-krát, vieme, že jeho hmotnosť je presne x-krát väčšia ako predtým. My ale vieme len, že jeho **obvod** sa zväčšil 1,1-násobne. Ako z toho zistíme, o koľko sa zväčšil jeho objem?

Valec má kruhovú podstavu, ktorej obvod je samozrejme obvodom valca. Vieme, že dĺžka obvodu kruhu je $2\pi r$, kde r je polomer kruhu. Môžeme si všimnúť, že toto je tiež lineárna závislosť - ak sa polomer zväčší x-krát, obvod sa tiež zväčší x-krát (a naopak). Keďže Jarov obvod sa zväčšil 1,1-násobne, aj jeho polomer sa musel zväčšiť 1,1-násobne.

A ako závisí objem valca od jeho polomeru? Objem valca je $\pi r^2 l$, kde πr^2 je plocha kruhovej podstavy a l je výška valca. Jarova výška ostáva konštantná, čiže zmena objemu závisí jedine od zmeny polomeru.

Teda vieme povedať, že ak sa polomer zväčšil 1,1-násobne, objem sa musel zväčšiť $(1{,}1)^2$ násobne. Toľkonásobne sa zväčšila aj hmotnosť, takže Jarova konečná hmotnosť je

$$(1{,}1)^2 \cdot 80\ \mathrm{kg} = 96{,}8\ \mathrm{kg}.$$

Pribral teda 16,8 kg.

1.2 Mám chuť na niečo chladené

vzorák **Marianka**, opravovala **Marianka**

Zo zadania vieme, že môžeme zanedbať mätu, limetku a topinamburový sirup v Marekovom čaji, takže s ním budeme počítať ako s vodou.

Na začiatku si poďme vypočítať objem kocky ľadu a premeňme si všetky jednotky na základné.

$$V_l = 3\ \mathrm{cm} \cdot 3\ \mathrm{cm} \cdot 3\ \mathrm{cm} = 27\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}000\,027\ \mathrm{m}^3.$$

Objem vody v metroch kubických je:

$$V_v = 200\ \mathrm{ml} = 0{,}2\ \mathrm{l} = 0{,}2\ \mathrm{dm}^3 = 0{,}0002\ \mathrm{m}^3$$

.

Keď hodíme kocku ľadu do vody, tak sa kocka začne otepľovať a voda ochladzovať. Deje sa to kvôli tepelným výmenám medzi kockou ľadu a vodou. Voda, teplejšia látka, odovzdáva svoje teplo kocke ľadu, chladnejšej látke. Keď sa tieto teploty vyrovnajú, nastane tepelná rovnováha. Nie je to však také jednoduché. Ak sa počas tohto procesu ľad oteplí na 0 °C, začne sa roztápať. A ak by sa zas voda nedajbože ochladila na 0 °C, začala by zamŕzať.

Rozdelíme si preto tepelné výmeny vody a ľadu na viac častí, aby sa nám lepšie počítalo.

Najskôr si vypočítajme, koľko tepla musí prijať kocka ľadu, aby sa zohriala na 0 °C. Budeme potrebovať kalorimetrickú rovnicu:

$$Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

pričom Q je prijaté teplo, m je hmotnosť látky, c je merná tepelná kapacita látky[1], t_1 je teplota na začiatku a t_2 je teplota na konci. Na internete sa dá nájsť, že merná tepelná kapacita vody je $c_v = 4200\ \mathrm{J/(kgK)}$ a merná tepelná kapacita ľadu je $c_l = 2100\ \mathrm{J/(kgK)}$.

Aby sme vzorec mohli použiť, potrebujeme zistiť hmotnosť kocky ľadu. Hmotnosť vypočítame ako $m = \rho \cdot V$, pričom hustota ľadu je $\rho_l = 917\ \mathrm{kg/m^3}$.

$$m_l = \rho_l \cdot V_l,$$

$$m_l = 917\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}000\,027\ \mathrm{m^3},$$

$$m_l = 0{,}0248\ \mathrm{kg}.$$

Teraz už vieme jednoducho vyrátať, koľko tepla prijme kocka ľadu, keď ju zohrejeme z −18 °C na 0 °C.

$$Q_1 = m_l \cdot c_l \cdot (t_{l2} - t_{l1}),$$

$$Q_1 = 0{,}0248\ \mathrm{kg} \cdot 2100\ \mathrm{J/(kgK)} \cdot (0\ ^\circ\mathrm{C} - (-18\ ^\circ\mathrm{C})),$$

$$Q_1 = 937{,}44\ \mathrm{J}.$$

V momente, ako sa kocka ľadu dostane na teplotu 0 °C, začne sa topiť. Tu začne hrať svoju rolu skupenské teplo topenia.[2] Na jeho vypočítanie použijeme vzorec

$$L_t = l_t \cdot m.$$

Do vzorca nám stačí dosadiť hmotnosť kocky ľadu a jej merné skupenské teplo topenia, ktoré je $l_{tl} = 334\,000\ \mathrm{J/kg}$.

$$L_t = l_{tl} \cdot m_l,$$

$$L_t = 334\,000\ \mathrm{J/kg} \cdot 0{,}0248\ \mathrm{kg},$$

$$L_t = 8283{,}2\ \mathrm{J}.$$

Už vieme, koľko tepla prijala kocka ľadu, keď sa zohriala z −18 °C na 0 °C a koľko tepla prijala, keď sa roztopila. Môžeme si to zrátať dokopy, aby sme vedeli celkové teplo, ktoré kocka ľadu prijala na to, aby sa zohriala z −18 °C a roztopila.

$$937{,}44\ \mathrm{J} + 8283{,}2\ \mathrm{J} = 9220{,}64\ \mathrm{J}.$$

Teraz potrebujeme zistiť, či má voda skutočne toľko tepelnej energie, aby kocku ľadu oteplila na 0 °C a následne ju roztopila. To zrátame znova ako

$$Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1).$$

[1] množstvo energie, ktorú musí prijať teleso jednotkovej hmotnosti (kilogram), aby sa jeho teplota zvýšila o jednotkovú hodnotu (stupeň Celzia/Kelvin)

[2] teplo, ktoré prijme 1 kilogram pevnej látky, ak sa pri teplote topenia celá premení na kvapalinu o tej istej teplote

Tentokrát do vzorca zadáme údaje vody, keď sa bude ochladzovať z 10 °C na 0 °C. Na to musíme vedieť hmotnosť vody. Vieme, že hustota vody je $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, takže jej hmotnosť je

$$m_v = \rho_v \cdot V_v,$$

$$m_v = 1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}0002\ \mathrm{m^3},$$

$$m_v = 0{,}2\ \mathrm{kg}.$$

Zvyšok si už dorátame ľahko.

$$Q_2 = m_v \cdot c_v \cdot (t_{v2} - t_{v1}),$$

$$Q_2 = 0{,}2\ \mathrm{kg} \cdot 4200\ \mathrm{J/(kgK)} \cdot (0\ ^\circ\mathrm{C} - 10\ ^\circ\mathrm{C}).$$

$$Q_2 = -8400\ \mathrm{J}.$$

[3]

Ako vidíme, voda nedokáže dodať kocke ľadu dostatočne veľa tepla, aby ju celú roztopila. Celý dej prebehne takto: ako Marekov čaj chladne, ľad sa otepľuje na 0 °C. Potom sa ľad začne topiť, pričom čaj sa stále ochladzuje. Čaj sa ochladí na 0 °C. Ľad a čaj majú teraz rovnakú teplotu - dosiahli sme rovnovážny stav. Teplota Marekovho čaju sa teda ustáli na 0 °C s tým, že ostane nejaká malá časť kocky ľadu neroztopená.

1.3 Termodynamika vifonky

vzorák **Krtko**, opravoval **Krtko**

V tejto úlohe ste mali za úlohu zmerať, ako rýchlo chladne voda v tanieri, keď na ňu fúkame, keď ju miešame a porovnať to s tým, keď s ňou nič nerobíme. Predtým, ako sa pustíme do samotného merania, je dobré sa zamyslieť, čo vlastne ideme merať.

1. Polievka zohrieva tanier a ten zohrieva okolie, toto však vodu veľmi neochladí. Problémom sú vlastnosti taniera, konkrétne tepelná vodivosť - tanier je totiž vyrobený z keramiky, čo je vcelku dobrý tepelný izolant. Takto nám teda polievka veľmi nevychladne.
2. Z povrchu sa pomaličky odparuje voda, tá so sebou berie veľa energie a teda ochladzuje polievku.

Čo teda ovplyvňuje rýchlosť vyparovania?

1. Koncentrácia vodných pár vo vzduchu nad tanierom.
2. Teplota vzduchu.
3. Teplota vody na hladine.
4. Okolitý tlak (ale ten sa v našom prípade nemení).

Teraz by nám mohlo byť jasné, s čím nám pomáha miešanie a s čím fúkanie.

Keď budeme iba miešať, tak teplota vody na hladine bude rovnaká ako teplota všetkej vody v tanieri. Avšak, nad tanierom sa nahromadia vodné pary a voda sa bude len veľmi ťažko ďalej odparovať.

No na druhú stranu, keď budeme iba fúkať, tak síce bude koncentrácia vodných pár minimálna, a teda aj teplota vzduchu nad tanierom nebude vyššia ako inde v miestnosti, avšak ochladzovať sa bude iba hladina. A keďže

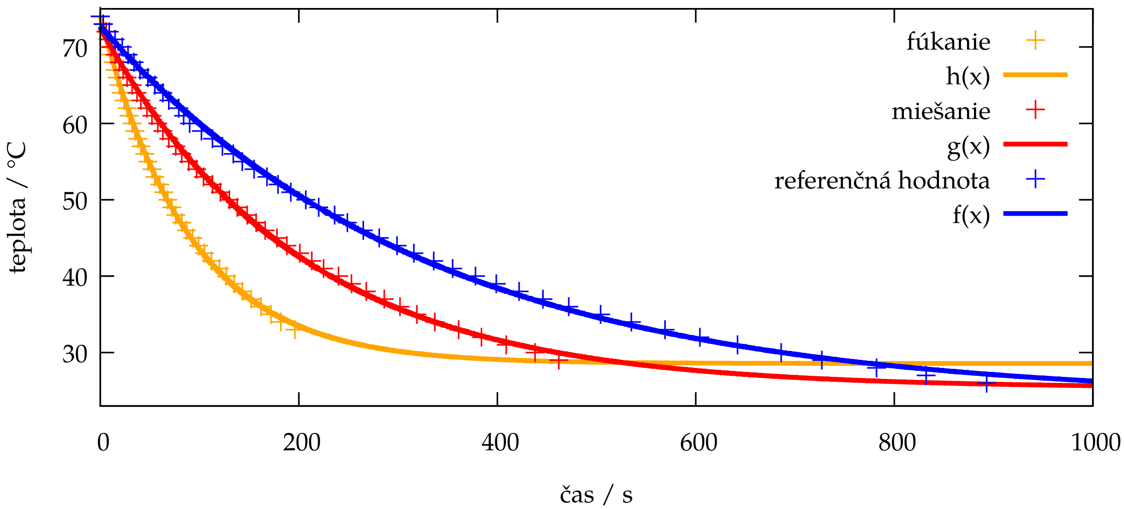
[3] Všimnime si, že teplo vyšlo so záporným znamienkom. Je to samozrejme preto, lebo počiatočná teplota bola väčšia ako konečná, teda čaj sa ochladzuje a teplo je uvoľnené.

voda je tiež vcelku dobrý tepelný izolant, tak na povrchu sa vytvorí chladnejšia vrstva vody, ktorá pochopiteľne celý proces chladnutia opäť spomalí.

Došli sme teda k predpokladom, že aj miešanie, aj fúkanie by malo pomôcť. Teraz si poďme naše predpoklady overiť.

Keďže nechceme, aby nám niečo experiment pokazilo, pokúsme sa odstrániť čo najviac nedokonalostí. Ja som napríklad na fúkanie využil starý ventilátor z počítača, tým som docielil stále rovnaké fúkanie. Keďže celý proces chladnutia bol pomerne rýchly, a najmä popri miešaní sa naozaj zle zapisovali výsledky, tak som natáčal video s teplomerom a až spätne ho spracoval v počítači.

Rovnako ako pri všetkých pokusoch, aj tu bolo dôležité opakovať meranie a vyrátať aspoň nejakú odchýlku. Ja som opakoval meranie s každým postupom 5 krát a vo výsledku som dostal takýto graf závislosti teploty od času.



Obrázok 1: *Teplota polievky v závislosti od času*

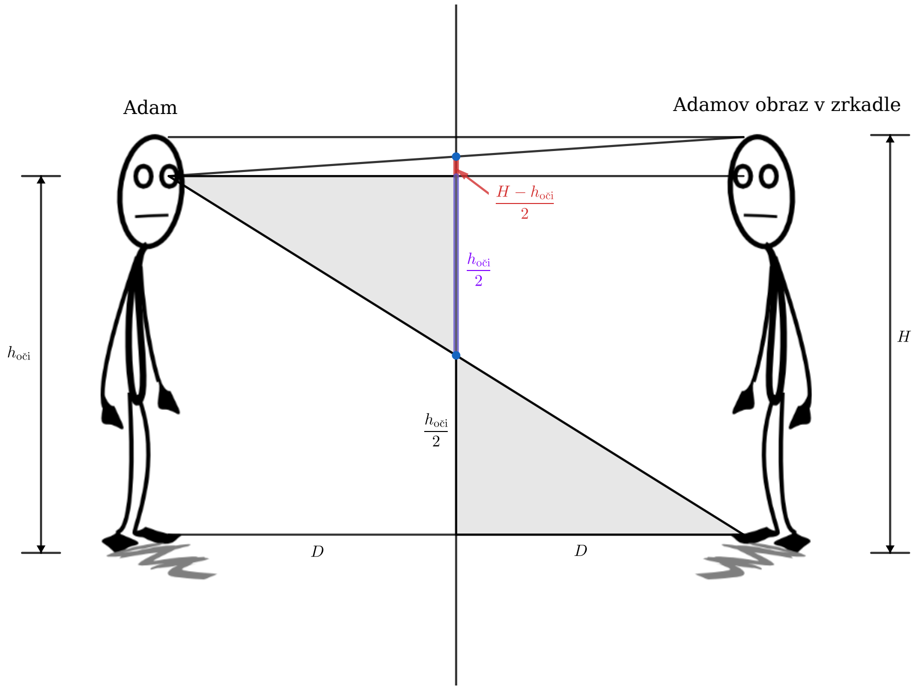
Ak vás zaujíma môj postup spracovávania, tak tomu venujem ešte tento odsek. Vždy, keď klesla teplota o stupeň, zaznamenal som si čas a odčítal od neho čas, keď som začal nalievať vodu do taniera. Potom som pre každú teplotu a každý postup zvlášť tieto časy spriemeroval, vyrátal odchýlku a tieto hodnoty dal do grafu.

1.4 Zrkadlo na mieru

vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

Najskôr by sme sa mali zamyslieť nad tým, ako vlastne funguje rovinné zrkadlo. Zrkadlo od seba odráža svetelné lúče, a teda našimi očami môžeme pozorovať akýsi obraz telesa pred zrkadlom. Skutočnú podobu toho, čo vidíme v zrkadle, nazývame vzor. Rovinné zrkadlo narozdiel od iných má ešte tú špeciálnu vlastnosť, že obraz je rovnako veľký ako vzor - teda obraz je zhodný so vzorom.

Zobrazovanie v rovinnom zrkadle si vieme jednoducho predstaviť ako osové preklopenie cez zrkadlo. Keď sa teda Adam postavil pred zrkadlo, mohlo by to vyzerať asi takto:



Obrázok 2: *Adam a jeho obraz v zrkadle*

Označme si výšku, v ktorej má Adam oči, ako $h_{\text{oči}}$. Z tejto výšky sa Adam pozerá do zrkadla, kde by sa chcel vidieť celý. To znamená, že chce vidieť svoje chodidlá a zároveň svoje vlasy. Ako máme dať zrkadlo, aby sa mu splnilo jeho želanie? Najskôr sa pozrime, v akej výške musí byť spodok zrkadla, aby Adam videl na svoje chodidlá.

Na to, aby Adam uvidel svoje chodidlá, musí zrak sklopiť tak, že sa bude pozerať na úroveň podlahy vo vzdialenosti D „za zrkadlom". Geometricky to pre nás znamená, že spojíme úsečkou oko vzoru a chodidlo obrazu, čím znázorníme Adamov pohľad. Táto úsečka sa nám v nejakom bode pretne so zrkadlom (v obrázku je to spodný modrý bod). Znamená to, že v tejto výške sa už musí nachádzať zrkadlo. Keď sa však na obrázok lepšie pozrieme, uvedomíme si, že sivé trojuholníky sú zhodné, a preto vzdialenosť od podlahy k spodku zrkadla je rovnaká ako fialová vzdialenosť. No a keďže ich súčet je $h_{\text{oči}}$, dĺžka fialovej úsečky bude $\frac{h_{\text{oči}}}{2}$.

Keď sa teraz chce pozrieť na svoje vlasy, musí sa pozrieť do výšky H a vzdialenosti D za zrkadlom. Keď spojíme oko vzoru s najvyšším bodom obrazu, pretnú nám zrkadlo v hornom modrom bode. Toto musí byť najvyšším bodom hľadaného zrkadla, pretože inak by Adam vrch svojej hlavy v zrkadle nevidel. Keď si znovu všimneme dva zhodné trojuholníky, nebude pre nás problémom vypočítať, že dĺžka červenej úsečky je rovná polovici výškového rozdielu medzi očami a úpätím hlavy - a teda $\frac{H-h_{\text{oči}}}{2}$.

Našli sme teda najmenšie zrkadlo, v ktorom sa Adam uvidí celý. Jeho výšku vieme vypočítať ako súčet dĺžok červenej a fialovej úsečky, čo vychádza ako

$$h_{\text{zrkadlo}} = \frac{H - h_{\text{oči}}}{2} + \frac{h_{\text{oči}}}{2} = \frac{H}{2}.$$

Toto zrkadlo treba zavesiť do výšky, ktorá je o $\frac{H-h_{\text{oči}}}{2}$ menšia ako Adamova výška.

Ešte však treba zodpovedať na jednu otázku: Závisia potrebné rozmery zrkadla od vzdialenosti D? Keď sa pozrieme na to, aké výsledky nám vyšli, ani v jednom z nich nevystupuje D. To znamená, že potrebné rozmery zrkadla nezávisia od vzdialenosti D.

1.5 Strach a Hrôza

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Hoci názov úlohy znie strašidelne, nás len tak ľahko niečo nevystraší a s vervou sa pustíme do riešenia.

Označme si polomery orbít Phobosa a_P a Deimosa a_D. Podľa zadania vieme, že

$$a_D = 2{,}5a_P.$$

Ďalej si označme periódy obehov Phobosa T_P a Deimosa T_D. Perióda obehu Deimosa je podľa zadania $T_D = 1{,}25$ d. Začneme tým, že si zistíme periódu obehu Phobosa. Na to použijeme tretí Keplerov zákon, podľa ktorého $\frac{T_P^2}{a_P^3} = \frac{T_D^2}{a_D^3}$, odkiaľ

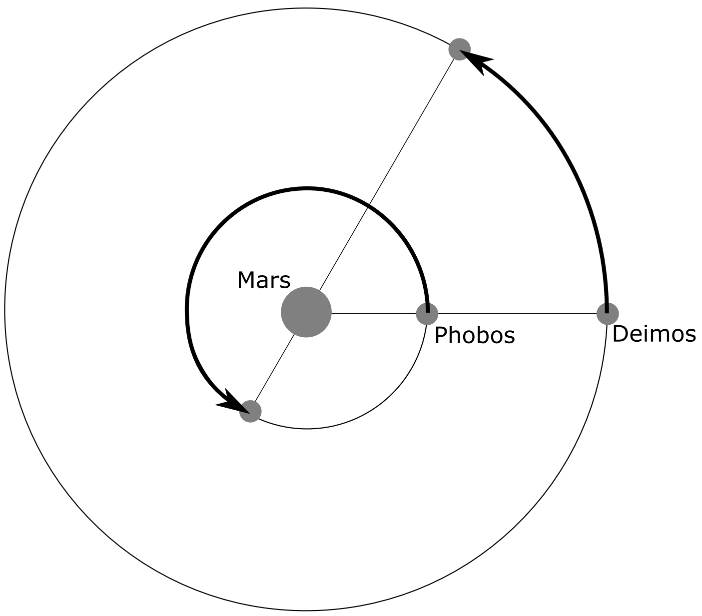
$$T_P = \sqrt{\frac{a_P}{a_D}}^3 T_D = \sqrt{\frac{a_P}{\frac{5}{2}a_P}}^3 \cdot \frac{5}{4}\ \mathrm{d} = \frac{1}{\sqrt{10}}\ \mathrm{d}.$$

Teraz vypočítajme rýchlosti oboch mesiacov. Zaveďme si uhlovú rýchlosť ako uhol, ktorý opíše mesiac za jednotku času. Vieme, že Phobos spraví jeden obeh za čas T_P, takže jeho uhlová rýchlosť bude

$$\omega_P = \frac{360°}{T_P}.$$

Analogicky uhlová rýchlosť Deimosa bude

$$\omega_D = \frac{360°}{T_D}.$$



Obrázok 3: *Dve po sebe nasledujúce konštelácie Marsu a jeho mesiacov na jednej priamke*

Zadanie sa nás pýta na najkratší čas τ, po uplynutí ktorého budú všetky tri objekty opäť na jednej priamke. Uvedomme si, že sa tak stane v momente, keď jeden mesiac spraví presne o polobehu viac než druhý. Ak teda označíme uhly, ktoré mesiace za čas τ opíšu, postupne $\varphi_P = \omega_P\tau$ a $\varphi_D = \omega_D\tau$, tak s prihliadnutím na to, že Phobos je rýchlejší,[4] musí medzi nimi platiť

$$\varphi_P = \varphi_D + 180°.$$

[4] $T_P < T_D \implies \omega_P > \omega_D$

Po dosadení príslušných výrazov do tejto rovnosti dostávame rovnicu

$$\frac{360°}{T_\mathrm{P}}\tau = \frac{360°}{T_\mathrm{D}}\tau + 180°,$$

odkiaľ pre hľadaný čas, po ktorom budú všetky objekty znava na jednej priamke, dostávame vyjadrenie

$$\tau = \frac{180°}{360°\left(\frac{1}{T_\mathrm{P}} - \frac{1}{T_\mathrm{D}}\right)} = \frac{1}{2\left(\sqrt{10} - \frac{4}{5}\right)}\ \mathrm{d} \doteq 0{,}21\ \mathrm{d}.$$

Okrem toho od nás zadanie chce aj to, akú časť svojej obežnej dráhy mesiace za tento čas urazia. Keďže sa mesiace pohybujú rovnomerne, tak túto informáciu vieme získať tým, že dáme do pomeru čas, ktorý sa pohybovali, k ich celej perióde, teda

$$k_\mathrm{P} = \frac{\tau}{T_\mathrm{P}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{10}-\frac{8}{5}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \frac{5\sqrt{10}}{10\sqrt{10} - 8} \doteq 0{,}67,$$

$$k_\mathrm{D} = \frac{\tau}{T_\mathrm{D}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{10}-\frac{8}{5}}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5\sqrt{10} - 4} \doteq 0{,}17.$$

Zistili sme, že Phobos zatiaľ prejde približne $\frac{2}{3}$ a Deimos $\frac{1}{6}$ svojej obežnej dráhy.