

Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Samkov cyklus

vzorák **Marianka**, opravovala **Marianka**

Najskôr si poďme premeniť Samkove rýchlosti na základné jednotky.

$$\frac{27 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{3,6} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\frac{15 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{3,6} = 4,1666 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Teraz si veľmi jednoducho vypočítame, akú vzdialenosť prešiel pri týchto dvoch rôznych rýchlostiach. Použijeme pri tom vzorec $s = v \cdot t$.

Na začiatku išiel 20 s rýchlosťou $7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$s_1 = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 \text{ s} = 150 \text{ m}.$$

Keď Samko prestal vládäť, tak išiel 60 s rýchlosťou $4,1666 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$s_2 = 4,1666 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} = 250 \text{ m}.$$

Vieme, že Samko takto opakoval svoj akceleračný cyklus, až kým nedošiel ku cieľu, ktorý je vzdialený 5 km = 5000 m. Keď si zrátame vzdialenosti $s_1 + s_2$, tak nám udávajú vzdialenosť, ktorú prešiel za jeden celý cyklus. Cykly sa stále opakujú, takže nám stačí zistiť koľkokrát sa cyklus zopakoval a vieme zistiť ako dlho mu trvala cesta ku cieľu.

$$150 \text{ m} + 250 \text{ m} = 400 \text{ m},$$

$$\frac{5000 \text{ m}}{400 \text{ m}} = 12,5 \text{ cyklu}.$$

Intuitívne by sme si mohli povedať, že nám teraz stačí dať celkový čas za celý cyklus 12,5 krát, čo by bolo 1000 s. Lenže takto to presne nefunguje. Rozdeľme si tieto cykly na 12 cyklov a 0,5 cyklu. Keď máme 12 cyklov, tak nám stačí vynásobiť celkový čas cyklu dvanástimi.

$$80 \text{ s} \cdot 12 = 960 \text{ s}.$$

S polovičným cyklom je to trochu ťažšie. Najskôr si potrebujeme zistiť, koľko metrov nám ostalo do cieľa. To zistíme ako $5000 \text{ m} - 12 \cdot (s_1 + s_2)$.

$$5000 \text{ m} - 12 \cdot 400 \text{ m} = 200 \text{ m}.$$

Samko teraz začína 13. cyklus, takže najskôr ide 20 s rýchlosťou $7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Už vieme, že takto prejde 150 m. To znamená, že mu ostane posledných 50 m, ktorých prejde rýchlosťou $4,1666 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Z toho vieme ľahko zistiť, ako

dlho mu to trvalo.

$$\frac{50 \text{ m}}{4,1666 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 12 \text{ s.}$$

Už nám stačí iba zrátať všetky časy a máme výsledok :).

$$960 \text{ s} + 20 \text{ s} + 12 \text{ s} = 992 \text{ s.}$$

3.2 Vodné hrátky

vzorák Jarka, opravovala Jarka

Najprv sa pokúsime zistiť, koľko molekúl vody sa nachádza v jednom pohári. Na to budeme potrebovať veličinu, ktorá sa volá molárna hmotnosť. Tá nám udáva hmotnosť v gramoch jedného mólu, čo je základná jednotka látkového množstva. Ešte budeme potrebovať Avogadrovu konštantu, ktorá nám hovorí, koľko častíc tvorí jeden mól. Zo zadania vieme, že pohár s vodou má objem 2 dl. Z hustoty vody vieme, že voda v pohári má hmotnosť 200 g. Z periodickej tabuľky (alebo vyhľadáním na internete) zistíme, že molárna hmotnosť vody je $18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Avogadrova konštanta má hodnotu $6,022 \times 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$. Z týchto hodnôt zistíme počet molekúl v pohári:

$$N_{\text{pohár}} = \frac{200 \text{ g} \cdot 6,022 \times 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}}{18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \approx 6,69 \times 10^{24}$$

Ešte potrebujeme vypočítať počet molekúl vody na celej Zemi. Najprv na internete nájdeme potrebné údaje. Podľa [Wikipédie](#) je na Zemi $1,386 \times 10^9 \text{ km}^3$ vody, čo je $1,386 \times 10^{24} \text{ g}$. Počet molekúl určíme rovnakým spôsobom:

$$N_{\text{Zem}} = \frac{1,386 \times 10^{24} \text{ g} \cdot 6,022 \times 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}}{18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \approx 4,64 \times 10^{46}$$

Vypočítame, akú časť všetkých molekúl vody na Zemi tvoria molekuly, ktoré boli v Terkinom a Mariankinom pohári, a z toho už ľahko vypočítame aj priemerne koľko z týchto molekúl mali v pohári ich (pra)¹⁰⁰vnúčence:

$$\frac{N_{\text{pohár}}}{N_{\text{Zem}}} N_{\text{pohár}} \approx 965$$

3.3 Marekova obľúbená fľaša

vzorák Jaro, opravoval Jaro

Majme fľašu s vodou, ktorej hladina je vo výške H . Nech sú vo fľaši dierky v rôznej výške. Najskôr sa zamyslime nad tým, ako by mala vyzeráť vzdialenosť dostreku d od výšky dierky z odo dna.

Čím je dierka hlbšie, tým je voda vystrekovaná pod vyšším tlakom, a teda vyššou rýchlosťou. Ak by bola dierka tesne pod hladinou, tak by voda pozvoľna vytekala, a teda by dostrekla do vzdialenosti presne 0 m. Na druhej strane, čím je hlbšie, tým je bližšie k podložke, na ktorú vyteká, a teda jej trvá kratšie, aby na ňu dopadla. V limitnom prípade, keď je dierka tesne pri dne, tak voda prakticky okamžite dopadne na podložku, čím je jej dostrek opäť 0 m. To znamená, že niekde medzi týmito dvomi limitnými polohami sa bude nachádzať maximum.

Môžeme si urobiť aj kvantitatívnu predpoveď. Uvažujme dierku vo výške z odo dna. Pre výtokovú rýchlosť platí Torricelliho vzorec $v = \sqrt{2gh}$, kde $h = H - z$ je výška hladiny nad dierkou.¹ Voda vyteká z dierky vodorovne,

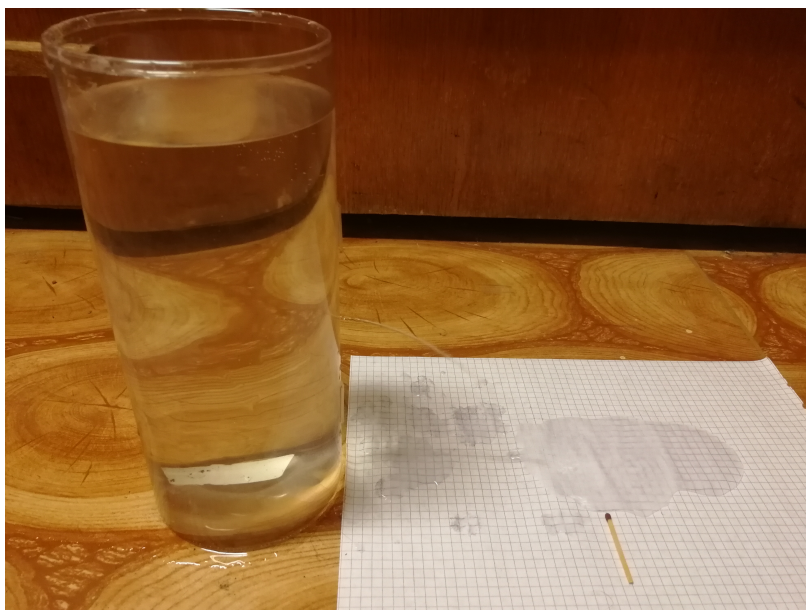
¹Dá sa to ľahko odvodiť zo zákona zachovania energie. Uvažujme malý kúsok kvapaliny s hmotnosťou m . Ten má pri opúšťaní nádoby kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Jeho miesto v nádobe zaberie kúsok kvapaliny, ktorý bol nad ním, miesto tohto kúska kúsok,

čiže vykonáva vodorovný vrh, pre ktorého dĺžku platí $d = v\sqrt{\frac{2z}{g}}$. Vylúčením výtokovej rýchlosti dostávame²

$$d = 2\sqrt{z(H-z)}.$$

Teraz už môžeme pristúpiť k meraniu. Namiesto fľaše použijeme nádobu valcového tvaru, pre ktorú sa bude jednoduchšie určovať dostrek, keďže všetky dierky budú presne nad sebou. Hladinu vody budeme mať vo výške $H = 20$ cm. Urobíme si tam značku, po ktorú budeme vodu vždy dopĺňať. Do nádoby si pripravíme dierky, pričom ich vzdialenosť volíme podľa toho, ako presne chceme výšku maximálneho dostreku určiť. My volíme dierky vo výškach $z_1 = 5$ cm, $z_2 = 7,5$ cm, $z_3 = 10$ cm, $z_4 = 12,5$ cm a $z_5 = 15$ cm. Všetky dierky prelepíme lepiacou páskou. Takto upravená nádoba je pripravená na meranie. Ešte si na podlahu umiestnime štvorcový papier, ktorý nám zjednoduší odčítavanie dostreku.

Meranie bude prebiehať nasledovne. Vodu v nádobe doplníme po značku. Nádobu umiestnime na okraj štvorcového papiera a jednu dierku odlepíme. Uvedomme si, že voda dostrekne najďalej v prvom momente, preto nemusíme čakať, kým všetka voda vytečie. Jednoducho si všimneme, kde voda dopadla v prvom momente a v tejto vzdialenosti si na papier položíme zápalku. Potom dierku opäť zalepíme a odčítame vzdialenosť zápalky od nádoby. Meranie opakujeme pre každú dierku päťkrát. Pred každým meraním podlahu dôkladne vyutierame a použijeme suchý štvorcový papier.



Obrázok 1: Vykonávanie merania

Namerané dáta sú zapísané v tabuľke. Strednú hodnotu dostreku pre každú výšku vypočítame ako obyčajný aritmetický priemer. Smerodajnú odchýlku zase tak, že nájdeme, ako sa každá nameraná hodnota líši od priemernej hodnoty, vypočítame druhé mocniny týchto rozdielov a sčítame ich. Potom tento súčet predelíme počtom meraní krát počtom meraní mínus jedna a na záver z toho urobíme odmocninu. Matematicky zapí-

ktorý bol nad ním, a tak ďalej. Efektívne tak ubudne kúsok z hladiny, a teda zmena potenciálnej energie bude $E_p = -mgh$. Celková zmena energie má byť nulová, preto $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, odkiaľ $v = \sqrt{2gh}$.

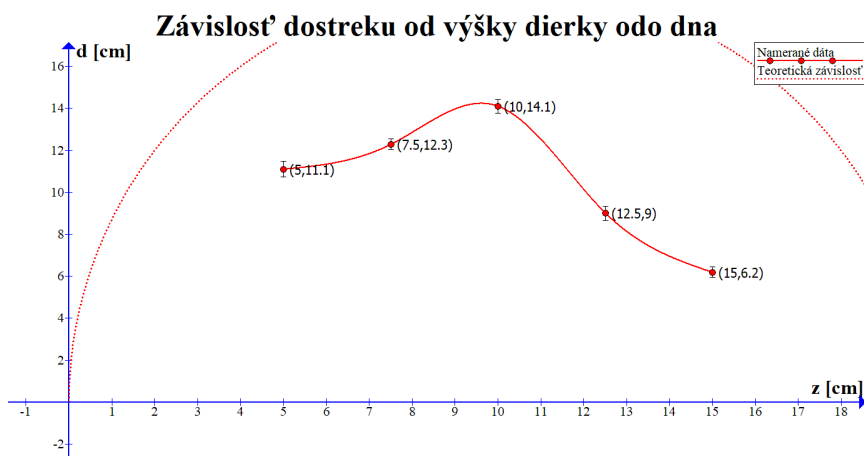
²Dá sa ukázať, že tento výraz dosahuje maximum pre $z = \frac{H}{2}$. Vyžaduje si to ale použitie netriviálnej matematiky, preto to nebudeme robiť. Rovnako sa časom naučíte, že uvedená rovnica je rovnicou polkružnice, preto budeme očakávať, že namerané hodnoty na grafe vytvoria polkružnicu, odkiaľ je už zrejmé, že maximum by malo byť v polovičnej výške. Ale nepredbiehajme...

sané $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}$, kde $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$ je spomínaná stredná hodnota dostreku.³ Ukážme si to na príklade výšky $z_3 = 10$ cm. Stredná hodnota dostreku je $\bar{d} = \frac{1}{5} (14 + 13 + 14.5 + 14 + 15) = 14,1$ cm a smerodajná odchýlka $\sigma = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} [(14 - 14,1)^2 + (13 - 14,1)^2 + (14,5 - 14,1)^2 + (14 - 14,1)^2 + (15 - 14,1)^2]} \doteq 0,33$ cm.

Tabuľka 1: Namerané dáta, stredné hodnoty, smerodajné odchýlky

Výška dierky z	15,0 cm	12,5 cm	10,0 cm	7,5 cm	5,0 cm
1. meranie	6,5 cm	8,5 cm	14,0 cm	12,5 cm	11,5 cm
2. meranie	6,0 cm	9,0 cm	13,0 cm	13,0 cm	10,0 cm
3. meranie	7,0 cm	10,0 cm	14,5 cm	12,0 cm	10,5 cm
4. meranie	5,5 cm	8,0 cm	14,0 cm	12,5 cm	12,0 cm
5. meranie	6,0 cm	9,5 cm	15,0 cm	11,5 cm	11,5 cm
Stredná hodnota $\bar{d}$	6,2 cm	9,0 cm	14,1 cm	12,3 cm	11,1 cm
Smerodajná odchýlka σ	0,25 cm	0,35 cm	0,33 cm	0,25 cm	0,37 cm

Na záver si vypočítané stredné hodnoty aj s príslušnými odchýlkami vykreslíme do grafu ako funkciu výšky dierky. Zobrazené body v grafe pospájame čiarou a z grafu odhadneme výšku dierky, pre ktorú je dostrek maximálny. Vidíme, že maximálnemu dostreku zodpovedá výška okolo $z = 10$ cm, čo zodpovedá našim očakávaniam. Už trochu menej zodpovedá našim očakávaniam veľkosť tohto maximálneho dostreku. Predpokladaný dostrek podľa teoretickej závislosti je totiž zobrazený na grafe bodkovanou čiarou a namerané hodnoty ležia výrazne nižšie. Je to spôsobené niekoľkými faktormi. V prvom rade sme zanedbali odpor vzduchu, takže skutočný dostrek je kratší než predpovedaný. Ďalej úlohu zohráva aj presný tvar a veľkosť dierok, ktoré určite neboli všetky úplne identické. Ďalej Torricelliho vzťah platí len približne – presne platí len vtedy, ak je dierka nekonečne malá, resp. hladina nekonečne veľká. Okrem toho úlohu mohlo zohrávať aj povrchové napätie, v dôsledku ktorého bola voda pri vylívaní mierne prirzdovaná.



Obrázok 2: Nameraná závislosť dostreku vody od výšky dierky

³Výraz $\sum_{i=1}^n x_i$ je ekvivalentný výrazu $x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Komentár od opravovateľa

Všetky odovzdané riešenia mali jeden spoločný nedostatok – v úvode chýbal teoretický rozbor. Netreba sa toho vôbec báť. Obzvlášť ak je podobne ako v tomto prípade fyzika skúmaného javu pomerne jednoduchá.

Spísanie teórie je dôležitou súčasťou riešenia. V prvom rade si totiž treba ujasniť, čo idem merať. A rovnako to treba vysvetliť aj prípadnému čitateľovi vášho riešenia.

Okrem toho spracovanie teórie napomáha správne navrhnutiu experimentu. Konkrétne v tomto prípade nám dá predstavu o tom, kde sa hľadané maximum zhruba nachádza, a my vieme, že dierky do fľaše máme robiť hlavne v tejto oblasti. Na záver sa potom treba vrátiť k teórii, výsledky meraní s ňou porovnať a pokúsiť sa vysvetliť prípadné rozdiely.

Musím pochváliť Lukáša, ktorý ako jediný dostatočne teoreticky vysvetlil a matematicky popísal skúmaný jav. Aj keď treba priznať, že to tiež nebolo úplne ideálne, lebo tak urobil až po vykonaní experimentu, keď sa mu nepozdávali výsledky, ktoré dostával.

3.4 Klamlivé lavičky

vzorák Lukáš O., opravoval Lukáš O.

Aby sme vedeli vysvetliť to, čo Jaro pociťuje, musíme trochu nahliadnuť do sveta biológie a vysvetliť, ako Jaro vníma teplotu. Naše nervy reagujú okrem samotnej teploty aj na to, ako rýchlo nám do tela prichádza tepelná energia, či ako rýchlo odchádza. Preto, keď teplo z nášho tela odchádza rýchlo, cítime to ako väčší chlad, než keď teplo uniká pomaly. To isté platí aj keď teplo prichádza.

Pozrime sa teda na naše dva materiály, z ktorých sú lavičky vyrobené: Kov a drevo. Keď sa dotkneme kovovej lavičky, teplo z nášho tela, ktoré je teplejšie ako lavička, sa začne rýchlo prenášať na kovovú lavičku. Naše nervy toto pociťujú ako rýchly únik tepla, teda pociťujeme chlad. U dreva je však tento tepelný presun pomalší, nepociťujeme to teda tak intenzívne. Inak povedané: Drevo je lepším tepelným izolantom ako kov. Prečo však? Pre kov je charakteristické práve to, že jeho valenčné elektróny sú voľné, čo znamená, že voľne "pobehujú" po kovovom telese. Keď sa do kovu dostane tepelná energia, toto teplo sa presunie aj na tieto vodivostné elektróny. No a keďže sú voľné, vedú získané teplo veľmi rýchlo šíriť. Drevo takúto schopnosť nemá, jeho tepelná vodivosť je rádovo menšia.

Ešte sa pozrime na tepelnú kapacitu. Napriek tomu, že ju má drevo vyššiu, pociťujeme ho ako teplejšie. To preto, lebo tepelná kapacita je číslo, ktoré nám uvádza množstvo potrebnej energie na to, aby sme látku zohriali o jeden stupeň. Lenže uvedomme si, že keď sedíme na lavičke, zohrievame len tú časť, ktorej sa bezprostredne dotýkame. Takže aj keď na zohriatie drevenej lavičky potrebujeme viac tepla, toto teplo zostáva v mieste, na ktorom sedíme, zatiaľ čo v prípade kovovej lavičky je toto teplo rýchlo odvádzané do celého objemu vďaka vysokej tepelnej vodivosti. Čiže rozdiel je v tom, že v prípade drevenej lavičky musíme zohriať len tú časť, na ktorej sedíme, kým v prípade kovovej lavičky efektívne zohrievame celú.

3.5 Odvážiš sa?

vzorák Lukáš G., opravoval Lukáš G.

Najskôr by sme sa mali zamyslieť nad otázkou, prečo nám pozemská váha ukázala na Europe menšiu hodnotu ako na Zemi. Naša hmotnosť sa totižto nemôže len tak zmeniť (teda, jedine že by sme sa poriadne najedli alebo držali diétu), a preto zmena hmotnosti nebude dôvodom rozdielných hodnôt na váhe na Zemi a na Europe. Bude v tom teda nejaký iný fígel. Aby sa nám ho však podarilo nájsť, musíme chápať, ako taká váha funguje.

Princíp určovania hmotnosti na váhe

Ak sa teleso s hmotnosťou m nachádza v tiažovom poli Zeme, tak vieme, že naň pôsobí tiažová sila

$$F_G = mg.$$

Ak sa teda postavíme na váhu, pôsobíme na ňu tiažovou silou, a teda dochádza k deformácii. Princíp váhy v jednoduchosti spočíva v tom, že určí veľkosť deformácie a na základe toho vie určiť, aká veľká tiažová sila na ňu pôsobí⁴. No a z veľkosti tiažovej sily už vieme určiť hmotnosť predelením gravitačným zrýchlením⁵.

Kde je teda problém?

Už sme zistili, ako funguje váha, preto by sa zišlo sa zamyslieť, prečo nám na Európe ukázala menšiu hodnotu. Uvedomme si, že váha je stavaná na pozemské prostredie, kde je gravitačné zrýchlenie $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Na Európe ale možno bude gravitačné zrýchlenie iné ako na Zemi. Potom by aj gravitačná sila, ktorou pôsobíme na váhu bola rôzna, a preto by nám váha mohla ukazovať rôzne výsledky. Teraz prichádza na rad článok o gravitačnom zákone, ktorý sme vám odporučili. V ňom ste sa mohli dočítať, že dve telesá vo vzdialenosti r , ktoré majú hmotnosti M a m , na seba vzájomne pôsobia gravitačnou silou, ktorej veľkosť je

$$F_g = \kappa \frac{Mm}{r^2},$$

kde $\kappa \approx 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ je gravitačná konštanta⁶. Tento vzorec platí všeobecne, teda by mal platiť aj pre našu Zem. Na domácu úlohu si to môžete overiť. Keďže ale poznáme vzorec na výpočet tejto sily, stačí už len zistiť hmotnosť Európy a jej polomer, a vieme vypočítať gravitačnú silu, aká tam na Lukáša pôsobí.

Výpočet

Označme si hmotnosť Lukáša $m_{\text{Lukáš}}$, hmotnosť Európy $m_{\text{Európa}}$ a polomer Európy r . Na Zemi váha ukáže hodnotu $m_{\text{Lukáš}}$ a na Európe mu ukáže hodnotu $\frac{\kappa m_{\text{Lukáš}} m_{\text{Európa}}}{g r^2}$ (pretože určí gravitačnú silu, ktorou na ňu Lukáš na Európe pôsobí, a potom ju ešte predelí gravitačným zrýchlením). Chceme určiť, koľkokrát je hodnota na Európe menšia (resp. hodnota na Zemi väčšia), a teda potrebujeme určiť pomer hodnoty na Zemi a na Európe:

$$\frac{m_{\text{Lukáš}}}{\frac{\kappa m_{\text{Lukáš}} m_{\text{Európa}}}{g r^2}} = \frac{m_{\text{Lukáš}} g r^2}{\kappa m_{\text{Lukáš}} m_{\text{Európa}}} = \frac{g r^2}{\kappa m_{\text{Európa}}}.$$

Môžeme si všimnúť, že tento pomer nie je závislý od Lukášovej hmotnosti, a teda dosadením $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\kappa = 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$, $r = 1,56 \times 10^6 \text{ m}$ a $m_{\text{Európa}} = 4,8 \times 10^{22} \text{ kg}$ ⁷ dostaneme, že váha Lukášovi ukázala na Európe približne 7,45-krát menšiu hodnotu ako na Zemi bez ohľadu na jeho hmotnosť.

⁴ Ak vás zaujíma, ako a prečo vie váha určiť z veľkosti deformácie veľkosť pôsobiacej sily, prečítajte si o tzv. Hookovom zákone

⁵ Kým ešte neexistovali elektrické váhy a hmotnosť ukazovala ručička na otočnej stupnici, riešilo sa toto „predelenie“ určením vhodnej mierky

⁶ tá bola zistená empiricky (experimentálne)

⁷ údaje boli čerpané z anglickej Wikipédie